Feuille d'exercices n° 1

Langages mathématiques. Variables, énoncés, ensembles

1 Notions du cours

Variables et énoncés mathématiques. Variables libres (ou parlantes) et variables liées (ou muettes) d'un énoncé. Connecteurs logiques : négation ($\neg$), ET logique ($\wedge$), OU logique ($\vee$), implication logique ($\implies$), équivalence logique ($\iff$). Booléens. Valeur de vérité d'un énoncé. Formule logique, table de vérité d'une formule, tautologie, contraposée. Négation d'un énoncé. Quantificateurs.

Ensembles. Relation d'appartenance. Définition par extension d'un ensemble avec notation du type $\{a, b, c\}$, définition par compréhension d'un ensemble avec notation du type $\{x \in A \,:\, P(x)\}$, définition d'un ensemble comme image d'une fonction avec notation du type $\{f(x) \,:\, x \in A\}$ ou $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Inclusion, égalité de deux ensembles. Opération ensembliste d'intersection, d'union, complémentaire. Produit cartésien. Ensemble des parties d'un ensemble. Cardinal d'un ensemble fini.

Fonctions et applications. Notion d'application, ensemble de départ et ensemble d'arrivée. Définition d'une application par cas. Égalité de deux applications. Application injective, surjective, bijective. Réciproque d'une application bijective. Composition de d'applications. Ensemble des applications de X vers Y.

2 Exercices d'entraînement

2.1 Variables libres et variables liées

Exercice 1. Précisez les variables libres et les variables liées qui interviennent dans les noms suivants:

(a) $3q + r$

(b) $f(x_1 + x_2 + x_3)$

(c) $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax \end{array} \right.$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (i+j)^2$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{M} (i+j)^2$

(f) $\displaystyle\int_0^x (3t+1)^2 \, dt$

(g) $\{x \in \mathbb{Z} \,:\, x \text{ est un nombre pair}\}$

(h) $\#\{i \in \mathbb{Z} \,:\, a \leq 2i < b\}$

Exercice 2. Décrire avec des symboles mathématiques les objets suivants, et précisez les variables libres:

1. L'ensemble des entiers relatifs multiples de m.
2. L'ensemble des solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
3. L'ensemble des solutions rationnelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
4. La somme des âges des étudiantes de ce TD; le produit des âges des étudiants de ce TD, filles ou garçons.
5. Le revenu annuel moyen des Français nés en Pensylvanie après 1965 mais avant l'année X et de taille au plus 1m70.
6. La décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier naturel $n \geq 1$.

Exercice 3. À la question : "Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^x \cos^2(y)dy$", un élève a donné la réponse : "$(1+y)^2$". Sans faire le calcul de l'intégrale, expliquer pourquoi cette réponde est fausse.

2.2 Booléens et connecteurs logiques

Exercice 4. Soit A un booléen. Quelles sont les valeurs des booléens suivants, en fonction de A ?

$$A \wedge 0 \qquad A \wedge 1 \qquad A \vee 0 \qquad A \vee 1 \qquad A \wedge \neg A \qquad A \vee \neg A$$

Exercice 5. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\iff$, $\implies$ ou $\impliedby$.

1. Ici x désigne une variable réelle: $x^2 = 4 \ \ldots\ldots\ x = 2$;
2. Ici x désigne une variable réelle: $x \geq 0 \ \ldots\ldots\ x \geq -1$
3. Ici x désigne une variable réelle: $x = \pi \ \ldots\ldots\ \cos(2x) = 1$.
4. Ici n désigne une variable entière: n est divible par 2 $\ldots\ldots$ n^2 est divisible par 4.

Exercice 6. Soit A un booléen. Quelles sont les valeurs des booléens suivants, en fonction de A ?

$$A \implies 0 \qquad A \implies 1 \qquad 0 \implies A \qquad 1 \implies A$$

Exercice 7. Soit A, B, C des variables booléennes. Donner des expressions ne faisant intervenir le signe de négation que devant des variables pour les booléens suivants :

$$\neg(A \wedge \neg B) \qquad \neg(A \wedge B \wedge C) \qquad \neg(A \implies \neg B) \qquad \neg(A \wedge (A \implies B))$$

Exercice 8. Examiner si les raisonnements suivants sont valides. Utiliser les tables de vérité si besoin.

1. L'alarme se déclenche si et seulement si à la fois la pression dépasse le seuil critique et la vanne est obstruée. La vanne n'est pas obstruée. Donc, l'alarme se déclenche si et seulement si la pression dépasse le seuil critique.
2. Si les impôts et le taux de chômage augmentent, il y a récession. Si le PIB augmente, il n'y a pas de récession. Le PIB et les impôts augmentent. Donc, le taux de chômage n'augmente pas.

Exercice 9. Préciser quelles implications peuvent être lues dans les énoncés suivants du langage courant :

1. "100% des gagnants au loto ont tenté leur chance"
2. "Ceinture attachée = sécurité au volant"

Exercice 10. Soit P, Q et R des énoncés. Montrer que les deux énoncés (a) et (b) sont équivalents dans les cas suivants, et énoncer la tautologie associée.

1. (a) $\big(P \wedge (Q \vee R)\big)$; (b) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
2. (a) $P \iff Q$; (b) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
3. (a) $(P \implies R) \wedge (Q \implies R)$; (b) $(P \vee Q) \implies R$

2.3 Énoncés

Exercice 11. Préciser les variables libres et liées des énoncés suivants. Donner leurs valeurs de vérité, éventuellement en fonction de la valeur des variables libres, si l'énoncé en comprend.

1. $-3 \in \{x \in \mathbb{R} \,:\, 13 - 2x > 1\}$
2. $5 \in \{x \in \mathbb{R} \,:\, 13 - 2x > c\}$

Exercice 12. Pour chacune des expressions suivantes : a) Indiquer s'il s'agit d'un nom ou d'un énoncé, et b) Indiquer quelles sont les variables et préciser leur statut : libre ou liée, en précisant dans ce cas le signe mutificateur correspondant.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a \times k$
2. $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ est bornée sur } [0, x]\}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + t} = b$
4. L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 2 = 0$ d'inconnue réelle x. Donner une expression synonyme ne comportant pas de variable liée.
5. L'équation $x + 3 = c$, d'inconnue réelle x, a une solution positive
6. L'ensemble des points M du plan tels que $OM = 3$ cm
7. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\}$
8. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^m} \neq 0$
9. Pour tout réel x, $mx^2 + 4x + 4 > 0$

Exercice 13. Déterminer la valeur de vérité des énoncés suivants.

1. $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad 2x - y = 0$
2. $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad 2x - y = 0$
3. $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad 2x - y = 0$. *Idem* en remplaçant $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Soient les quatre propositions suivantes :

$(P_1) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
$(P_2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
$(P_3) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
$(P_4) \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y^2 > 0$

1. Donner la négation de chacune de ces propositions.
2. Les propositions P_1, P_2, P_3 et P_4 sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 15. Traduire en langage mathématique les énoncés suivants et donner leur valeur de vérité. Ensuite, écrire leur négation, et donner à nouveau la valeur de vérité:

1. Pour tout entier n, on a que $2n$ est entier.

2. Pour tout entier n, on a que $n/2$ est entier.

Exercice 16. On rappelle qu'un entier x *divise* un entier y s'il existe un entier k tel que $y = kx$. On le note: $x|y$. Quels sont les entiers naturels p pour lesquels les énoncés suivants sont vrais :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad (p|n \implies 2|n)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n|p \implies 2|n)$

Exercice 17. Dans cet exercice, D et D' sont des variables prenant leurs valeurs parmi les droites d'un plan. On considère les énoncés:

A: D et D' sont parallèles
B: D et D' n'ont aucun point en commun
C: D et D' sont confondues

Écrire à l'aide des lettres A, B, C et des symboles $\neg$, $\vee$, $\wedge$ et $\implies$ les énoncés suivants—vous remarquerez aussi que certains de ces énoncés sont faux.

1. D et D' sont parallèles si elles n'ont aucun point en commun ou si elles sont confondues
2. D et D' ne sont ni parallèles ni confondues
3. Si D et D' n'ont aucun point commun, elles sont parallèles.
4. Pour que les droites D et D' soient parallèles, il suffit qu'elles soient confondues.
5. Une condition nécessaire pour que D et D' soient parallèles est qu'elles n'aient aucun point commun.
6. Pour que les droites D et D' soient parallèles, il faut qu'elles n'aient aucun point commun.
7. Si D et D' ont un point commun, elles ne sont pas parallèles, sauf si elles sont confondues.
8. Soit D et D' n'ont aucun point en commun soit elles sont confondues

Exercice 18. On considère les deux implications suivantes :

- $(I_1) : S \implies (\neg P) \vee Q$.
- $(I_2) : P \implies \neg(Q \wedge S)$.

1. Écrire la contraposée de (I_1).
2. Montrer que (I_2) est logiquement équivalente à $Q \implies \neg(P \wedge S)$.
3. On suppose maintenant que la proposition P est vraie, ainsi que les deux implications (I_1) et (I_2). Montrer que sous ces hypothèses, la proposition S est fausse.

2.4 Ensembles

Exercice 19.
Compléter avec les symboles $\in$, $\notin$ ou $\subseteq$.

(a) $0 \ldots\ [0,1]$

(b) $a \ldots\ \{a,b,c\}$

(c) $\{a\} \ldots\ \{a,b,c\}$

(d) $\{a\} \ldots\ \mathcal{P}\big(\{a,b,c\}\big)$

(e) $\mathbb{N} \ldots\ \mathcal{P}(\mathbb{R})$

(f) $[0,\frac{1}{2}[\ \ldots\ [0,1] \cup [3,4]$

(g) $\emptyset \ldots\ \{1,2,3\}$

(h) $\{\emptyset\} \ldots\ \{1,2,3\}$

(i) $3 \ldots\ [0,1] \cup \{3\}$

(j) $\frac{1}{2} \ldots\ \{0,1\} \cup [3,4]$

Exercice 20.

1. Donner une description par compréhension des ensembles suivants et dénombrer leurs éléments en fonction des variables libres m et n, supposées entières et telles que $n \leq m$:

   $A_n = \{1,\ldots,n\}$ $\qquad$ $C_{m,n} = \{n, n+1, \ldots, m\}$

   $B_n = \{0,\ldots,n\}$ $\qquad$ $D_{m,n} = \{n+1,\ldots,m\}$.

2. Que représente l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ pour $n = 0$?

Exercice 21. Dans cet exercice A, B, C désignent des parties d'un ensemble E. Reformuler les énoncés suivants par des propriétés de leurs éléments. Par exemple, pour $A = B$, on écrirait :

$$A = B \iff \big(\forall x \in E \quad (x \in A \iff x \in B)\big)$$

(a) $A \subseteq B$

(b) $A \nsubseteq B$

(c) $A \subseteq (E \setminus B)$

(d) $A = B \cap C$

(e) $A \neq B$

(f) $A = B \cup C$

Exercice 22. E est un ensemble. Prouver les assertions suivantes :

(a) $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad A \cup (E \setminus A) = E$

(b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cup B = A) \iff B \subseteq A$

Exercice 23. Étant données A et B deux parties de E, montrer que :

$$A = B \iff A \cap B = A \cup B$$

Exercice 24.

1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $A = \mathbb{R} \times [0;1]$. Dire pour chacun des 4 énoncés proposés s'il est vrai ou s'il est faux. Justifier.

   $$\begin{aligned}
   &(1)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad (x,y) \in A\\
   &(2)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (x,y) \in A\\
   &(3)\ \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad (x,y) \in A\\
   &(4)\ \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x,y) \in A
   \end{aligned}$$

   Même question pour $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\big\}$

2. Peut-on trouver une partie A de $\mathbb{R}^2$ telle que les énoncés 1 et 4 soient faux et les énoncés 2 et 3 soient vrais ?

3. Peut-on trouver une partie A de $\mathbb{R}^2$ telle que les énoncés 1 et 3 soient faux et les énoncés 2 et 4 soient vrais ?

2.5 Fonctions et applications

Exercice 25. Donner un exemple pour illustrer les cas suivants.

1. f est une fonction surjective mais pas bijective.
2. f est une fonction injective mais pas surjective.

Exercice 26. Soit A et B les ensembles définis en extension par :

$$A = \{a, b, c\}, \qquad\qquad B = \{0, 1, 2, 3\}.$$

On considère la fonction $f : A \to B$ définie par ses valeurs ci-dessous :

$$f(a) = 0 \qquad\qquad f(b) = 1 \qquad\qquad f(c) = 2$$

1. Quelle est l'image réciproque par f de $\{1, 2\}$?
   Quelle est l'image réciproque par f de B ?
2. Quelle est l'image directe par f de A ?
3. Donner deux sous-ensembles de B dont l'image réciproque par f est l'ensemble vide. Y en a-t-il d'autres ?
4. f est-elle injective? f est-elle surjective?

Exercice 27. Donner, s'il en existe, toutes les applications injectives de E dans F dans les cas suivants. S'il n'en existe pas, justifier.

1. $E = \{1, 2\}$ et $F = \{5, 6, 7\}$,
2. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{5, 6\}$.

Exercice 28. Soit $f : E \to F$ une application.

1. (a) Montrer que si $A \subseteq B \subseteq E$, alors $f(A) \subseteq f(B)$. .
   (b) Si $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$ et $f(A) \subseteq f(B)$, a-t-on nécessairement $A \subseteq B$?
2. (a) Montrer que si $A \subseteq B \subseteq F$, alors $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
   (b) Si $A \subseteq F$ et $B \subseteq F$ et $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$, a-t-on nécessairement $A \subseteq B$?

Exercice 29. Soit $f : E \to F$ une application. Comparer les paires d'ensembles suivantes :

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \text{ et } f^{-1}(A \cap B), \qquad f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ et } f^{-1}(A \cup B),$$
$$f(A) \cap f(B) \text{ et } f(A \cap B), \qquad f(A) \cup f(B) \text{ et } f(A \cup B).$$

Exercice 30. Dans les deux exemples ci-dessous, montrer qu'on définit bien une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant, pour tout entier x :

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} y & \text{si } \exists y \in \mathbb{N} \quad x = 2y \\ 0 & \text{si } x \text{ n'est pas multiple de } 2 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \text{ est multiple de } 2 \\ \text{le plus petit facteur premier de } x & \text{si } x \text{ est multiple de } 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 31. Donner un intervalle A de $\mathbb{R}$ pour que les fonctions suivantes soient injectives.

1. $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(2x)$.
2. $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x + 1$.
3. $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x^2 + x + 1$.
4. $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(|\cos(x)|)$.

Exercice 32. Donner un intervalle B de $\mathbb{R}$ pour que les fonctions suivantes soient surjectives.

1. $f : \mathbb{R} \to B$, $x \mapsto \cos(2x)$.
2. $f : \mathbb{R} \to B$, $x \mapsto x^2 + x + 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to B$, $x \mapsto x^3 - 3x^2 + x + 1$.
4. $f :]-\pi/2, \pi/2[\to B$, $x \mapsto \ln(|\cos(x)|)$.

Exercice 33. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants et vérifier que $f \circ g \neq g \circ f$.

1. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
2. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2 - 3x + 4$.
3. $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = e^x$.
4. $f(x) = |x|$, $g(x) = x + 1$.

3 Exercices additionnels

Exercice 34. Etant donné un ensemble W, comparer les valeurs de vérité des énoncés (a) et (b) dans les cas suivants :

1. $(a)\ \forall x \in W \quad \big(A(x) \implies B(x)\big)$, $\ (b)\ \big(\forall x \in W \quad A(x)\big) \implies \big(\forall x \in W \quad B(x)\big)$
2. $(a)\ \exists x \in W \quad \big(A(x) \implies B(x)\big)$, $\ (b)\ \big(\exists x \in W \quad A(x)\big) \implies \big(\exists x \in W \quad B(x)\big)$.

Exercice 35.

1. Combien y a-t-il de connecteurs logiques unaires ? En donner la liste.
2. Combien y a-t-il de connecteurs logiques binaires ? Combien y a-t-il de connecteurs logiques binaires et commutatifs ? Déterminer un connecteur binaire commutatif non constant et différent de $\iff$, $\vee$, $\implies$ et $\wedge$.

Exercice 36. Soit $f : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ un connecteur logique binaire. On définit son connecteur *dérivé* $g : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ par $g(x, y) = \neg f(\neg x, \neg y)$, et on le note $g = f'$.

1. Montrer que $(f')' = f$.
2. Identifier les connecteurs dérivés de $\wedge$ et de $\vee$.
3. Montrer que si f est commutatif alors f' est commutatif.
4. Soit f un connecteur tel que $f = f'$. Montrer que f n'est ni constant ni commutatif. Combien y a-t-il de connecteurs binaires f tels que $f' = f$?

Exercice 37. Traduire sous forme d'implication les énoncés suivants:

1. Si au moins 10 personnes sont présentes, alors la séance a lieu.
2. La séance a lieu si au moins 10 personnes sont présentes.
3. La séance a lieu seulement si au moins 10 personnes sont présentes.
4. La présence d'au moins 10 personnes est une condition suffisante pour que la séance ait lieu.
5. La présence d'au moins 10 personnes est une condition nécessaire pour que la séance ait lieu.

Exercice 38. Soit $A(x,y)$ un énoncé ayant x et y comme seules variables libres, prenant leurs valeurs dans E et dans F respectivement. Prouver l'équivalence suivante :

$$\big(\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad A(x,y)\big) \iff \big(\forall (x,y) \in E \times F \quad A(x,y)\big)$$

Si $E = F$, justifier la notation:

$$\forall x, y \in E \quad A(x,y)$$

comme raccourci pour une notation plus rigoureuse qu'on énoncera.

Exercice 39. Soient A, B deux parties d'un ensemble E.

(a) Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

(b) *Idem* pour l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 40. Soit E et F deux ensembles.

(a) Calculer $(A \setminus B) \times (C \setminus D)$ puis $(A \times C) \setminus (B \times D)$ dans le cas où $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$, $C = \{5, 6\}$ et $D = \{6\}$.

(b) Soit E un ensemble, et soient A, B, C et D trois sous-ensembles de E. Démontrer l'énoncé :

$$((A \setminus B) \times (C \setminus D)) \subseteq ((A \times C) \setminus (B \times D)).$$

(c) Montrer à l'aide d'un exemple que l'on peut avoir égalité, c'est à dire

$$((A \times C) \setminus (B \times D)) = ((A \setminus B) \times (C \setminus D)).$$

Est-ce toujours le cas?

Exercice 41. Soient $E = \{0, 1, 2\}$, $F = \{a, b, c, d\}$, $G = \{u, v, w\}$ trois ensembles définis en extension. On définit deux applications :

- $f : E \to F$ définie par $f(0) = a, \quad f(1) = c, \quad f(2) = d.$
- $g : F \to G$ définie par $g(a) = u, \quad g(b) = w, \quad g(c) = v, \quad g(d) = w.$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. L'application g est-elle injective ? surjective ?
3. (a) Décrire l'application $h = g \circ f$ (c'est-à-dire donner son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée et l'image de chaque élément).
   (b) Montrer que h est bijective et décrire sa réciproque.
4. Trouver deux applications $f' : E \to F$ et $g' : F \to G$ telles que f' est injective, g' est surjective et $g' \circ f'$ n'est pas bijective.
5. Peut-on trouver deux applications $f'' : E \to F$ et $g'' : F \to G$ telles que f'', g'' et $g'' \circ f''$ sont bijectives ?

Exercice 42. Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est strictement croissante si elle vérifie :

$$\forall a, b \in I \quad a < b \implies f(a) < f(b)$$

1. Montrer qu'une application strictement croissante est injective.
2. Supposons $f : I \to J$ strictement croissante et surjective. Montrer que f est bijective, et que sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement croissante.

4 Exercices d'évaluation

Exercice 43.
Le tableau suivant propose, par ligne, plusieurs descriptions d'un même ensemble. Compléter les cases vides *lorsque c'est possible.*

Extension	*Compréhension*	*Extension généralisée*	*Image d'une fonction*
$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$			
	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x + y = -1\}$		
		$\{1, 3, ..., 2k + 1, ...\}$	
			$\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Exercice 44.

1. Soit l'énoncé : $-3 \in \{x \in \mathbb{R} \mid 13 - 2x > 1\}$

   Si l'énoncé n'a pas de variable libre, donner sa valeur de vérité. Si l'énoncé a une variable libre, donner la valeur de vérité de l'énoncé en fonction des valeurs que peut prendre la variable libre.

2. De même pour l'énoncé : $5 \in \{x \in \mathbb{R} \mid 13 - 2x > c\}$

Exercice 45. Soit x une variable prenant ses valeurs parmi les entiers relatifs, et soit P une variable prenant ses valeurs parmi les parties de $\mathbb{Z}$.

1. Indiquer les variables libres et liées des deux énoncés suivants :

   (a) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \in P$ $\qquad\qquad$ (b) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad x \in P$

2. Quelles sont les valeurs de P pour lesquelles l'énoncé (a) est vrai ?
3. Quelles sont les valeurs de P pour lesquelles l'énoncé (b) est vrai ?

Exercice 46. Soit E un ensemble, et soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Démontrer :

$$((A \cup B)\backslash A) \cap C = (B \cap C)\backslash(A \cap B \cap C).$$

Exercice 47. (Les parties 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre que l'on veut.)

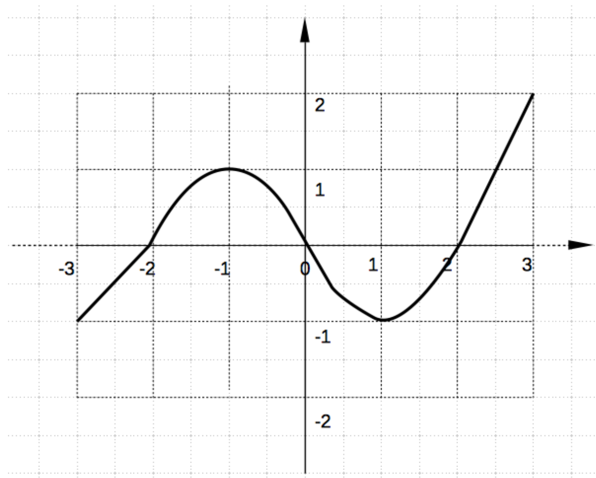

Figure 1: Graphe d'une fonction pour l'exercice 47

1. On considère l'application f de $[-3,3]$ dans $[-2,2]$ dont le graphe est illustré à la figure 1. En observant ce graphe, décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles, de réunions ou intersections d'intervalles (on ne demande pas de justification) :

   (a) $f([-2,1])$.

   (b) $f^{-1}\big(f([-2,1])\big)$.

   (c) $f^{-1}([0,2])$.

   (d) $f\big(f^{-1}([0,2])\big)$.

2. Soit $f : E \to F$ une application.

   Montrer que pour toute partie A de E et toute partie B de F :

$$f(A) \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$$

Exercice 48. Posons $E = \{a,b,c,d\}$ et $F = \{0,1,2,3\}$. Soit $f : E \to F$ l'application définie par :

$$f(a) = 2, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = 0, \quad f(d) = 1.$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?
3. Soient $x \in E$ et B une partie de F. On considère l'énoncé suivant :

$$x \neq d \implies f(x) \in B.$$

   Donner sa contraposée, puis sa réciproque.

4. Déterminer toutes les parties B de F telles que l'énoncé

$$\forall x \in E \quad (x \neq d \implies f(x) \in B)$$

   soit vrai.

Exercice 49. Soit E l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5\}$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et $\mathcal{P}(E)^*$ l'ensemble des parties non vides de E.

1. Quels sont les cardinaux de $\mathcal{P}(E)$ et de $\mathcal{P}(E)^*$?
2. On considère l'application $f : \mathcal{P}(E)^* \to E$ définie par $f(X) = \min(X)$, où $\min(X)$ désigne le plus petit élément de l'ensemble X (on a par exemple $f(\{2, 4, 5\}) = 2$).
   (a) Calculer $f(X)$ successivement pour $X = E$, $X = \{1, 2, 4\}$, $X = \{5\}$.
   (b) L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifiez chacune de vos réponses.
   (c) Donner tous les antécédents de 3 par f.
3. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifiez chacune de vos réponses.
   (a) $\forall X \in \mathcal{P}(E)^* \quad \forall Y \in \mathcal{P}(E)^* \quad (X \subseteq Y \implies f(X) \geqslant f(Y))$,
   (b) $\forall X \in \mathcal{P}(E)^* \quad \forall Y \in \mathcal{P}(E)^* \quad (f(X) \geqslant f(Y) \implies X \subseteq Y)$,
   (c) $\forall X \in \mathcal{P}(E)^* \quad \exists Y \in \mathcal{P}(E)^* \quad ((X \neq Y) \wedge (f(X) = f(Y)))$,
   (d) $\forall X \in \mathcal{P}(E)^* \quad \forall Y \in \mathcal{P}(E)^* \quad (f(X \cup Y) = \min\{f(X), f(Y)\})$,
4. Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{P}(E)^*$. À quelle condition $f(X \cap Y)$ est-elle définie ? Quelle relation existe-t-il alors entre $f(X)$, $f(Y)$ et $f(X \cap Y)$?

Exercice 50. On rappelle que pour tout nombre réel x non nul, son inverse x^{-1} est bien défini et vérifie : $xx^{-1} = 1$.
Démontrer l'énoncé suivant :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad ((a = 0 \vee b = 0) \iff ab = 0).$$

Exercice 51. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$ si $n > 0$ et $S_0 = 0$.

1. Montrer l'égalité suivante:
$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 = S_n + 2\sum_{i=1}^{n} i + n$$
2. Montrer l'égalité:
$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 = S_n + (n+1)^2 - 1$$
3. En déduire l'égalité suivante:
$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 52. Dans cet exercice on s'intéresse à l'énoncé suivant :

Pour tout réels a et b, si ($a \neq -1$ et $b \neq -1$) alors $a + b + ab \neq -1$. (*)

qui peut aussi s'écrire :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \big((a \neq -1 \wedge b \neq -1) \implies a + b + ab \neq -1\big) \qquad (**)$$

1. Écrire la contraposée de cet énoncé.
2. Montrer que, quels que soient les énoncés A, B et C, les énoncés
$$\big(A \implies (B \vee C)\big) \quad \text{et} \quad \big((A \wedge \neg B) \implies C\big)$$
sont équivalents.

3. Lire puis commenter cette démonstration de l'énoncé (*), proposée par un élève :

> Supposons que a et b soient des réels tels que $a + b + ab = -1$.
>
> - Supposons que $a \neq -1$, alors $a + b + ab = -1 \Rightarrow b(1 + a) = -1 - a$
> $$\Rightarrow b = \frac{-1 - a}{1 + a}$$
> $$\Rightarrow b = -1$$
> - Supposons maintenant que $b \neq -1$, alors $a + b + ab = -1 \Rightarrow a(1 + b) = -1 - b$
> $$\Rightarrow b = \frac{-1 - b}{1 + b}$$
> $$\Rightarrow a = -1$$
>
> Donc on a bien $a = -1$ ou $b = -1$.

Exercice 53. Dans ce qui suit, les variables f et g désignent des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les autres variables désignent des réels.

1. Pour chacune des propositions $(\mathrm{A}_1), \ldots, (\mathrm{A}_4)$ ci-dessous, donner un énoncé synonyme écrit en n'utilisant aucun symbole autre que: a) des parenthèses; b) des variables désignants des réels ou des fonctions; c) les connecteurs logiques usuels et les quantificateurs; d) les symboles de comparaison $=, \neq, <, \leq, >, \geq$; e) les symboles d'opérations arithmétiques usuels; f) des constantes entières.

   (A_1) f est strictement positive.

   (A_2) f est paire.

   (A_3) f est décroissante.

   (A_4) f est une fonction affine.

2. Écrire la négation des propositions $(\mathrm{A}_1), \ldots, (\mathrm{A}_4)$, d'abord en mots puis en symboles mathématiques.

3. Pour chacune des propositions $(\mathrm{B}_1), \ldots, (\mathrm{B}_3)$ ci-dessous, reconnaître une propriété de la fonction f qui est l'objet d'une définition usuelle.

   (B_1) $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$

   (B_2) $\exists T \in \mathbb{R}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$

   (B_3) $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M$

4. Écrire la négation des propositions $(\mathrm{B}_1), \ldots, (\mathrm{B}_3)$, d'abord en mots puis en symboles.

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Techniques de démonstration

1 Notions du cours

Égalité d'ensembles par double inclusion. Décomposition d'un énoncé mathématique pour fixer les variables muettes ($\forall x \in A \longrightarrow$ "Soit $x \in A$"). Démonstration par récurrence, par récurrence "forte", par cas, par contraposée, par l'absurde.

2 Exercices d'entraînement

Exercice 1. On considère les deux implications suivantes :

- $(I_1) : S \Rightarrow (\neg P) \vee Q$.
- $(I_2) : P \Rightarrow \neg(Q \wedge S)$.

1. Écrire la contraposée de (I_1).
2. Montrer que (I_2) est logiquement équivalente à $Q \Rightarrow \neg(P \wedge S)$.
3. On suppose maintenant que la proposition P est vraie, ainsi que les deux implications (I_1) et (I_2). Montrer que sous ces hypothèses, la proposition S est fausse.

Exercice 2 (Unicité). Soit $P(x)$ une propriété ayant x comme unique variable libre, où x prend ses valeurs dans un ensemble X. On suppose qu'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$ est vraie. Montrer l'équivalence des deux énoncés suivants :

$$\forall x \in X \quad (P(x) \implies x = x_0)$$
$$\forall (x,y) \in X \times X \quad \big((P(x) \wedge P(y)\big) \implies x = y)$$

Exercice 3 (Ensembles et applications). Soit f une application de E dans F.

1. Montrer que pour toute partie A de E, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que si f est injective, pour toute partie A de E on a également $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.
3. Montrer que pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
4. Montrer que si f est surjective, pour toute partie B de F on a également $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.

Exercice 4 (Ensembles et applications). Soit f une application de E dans F, $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Montrer que :

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

Exercice 5 (Injection/surjection). Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 6 (Ensembles). Soit E un ensemble et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-ensembles de E. Montrer que si :

$$\mathcal{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0} A_n\Big) \subseteq \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{P}(A_n),$$

alors il existe une entier n tel que : $\forall j \in \mathbb{N} \quad A_j \subseteq A_n$.

Exercice 7 (Récurrence). Prouver que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Exercice 8 (Récurrence). Soit $n \geq 1$ entier. établir l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 9 (Récurrence). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} k.(k+1)$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{3}\, n\,(n+1)\,(n+2)$.

Exercice 10 (Récurrence). Soient a et b deux réels tels que $a > 0$ et $a + b > 0$.
On s'intéresse à la propriété $P(n)$: $(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b$

1. Vérifier que $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.
2. Démontrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 (Récurrence). Pour tout nombre entier naturel n, soit la propriété P_n donnée par:

$$P_n \;:\; n^2 > n + 4\,.$$

1. La propriété P_n est-elle vraie quel que soit l'entier n ?
2. Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie quel que soit le nombre entier naturel n. On pourra distinguer les cas $n = 0$ et $n > 0$.
3. Donner un entier n_0 pour lequel la propriété suivante est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \implies P_n)\,.$$

Exercice 12 (Utilisation de la récurrence forte). On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \end{cases}$$

Montrer que $u_n \leq 2^n$ pour tout entier n.

Exercice 13 (Raisonnement par contraposée).

1. Soient k et n deux entiers, écrire la contraposée de l'énoncé :

$$\text{Si } k > n \text{ alors } k \text{ ne divise pas } n.$$

2. Montrer par contraposée que :

$$\text{Pour tous } k, n \in \mathbb{N}^*, \text{ si } k > n \text{ alors } k \text{ ne divise pas } n.$$

Exercice 14 (Absurde). On rappelle qu'un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs.

1. Soit k un entier naturel différent de 1. En considérant l'ensemble de ses diviseurs supérieurs ou égaux à 2 montrer que k a au moins un diviseur premier.
2. On considère n nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$, et on pose $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Montrer que N n'est divisible par aucun des nombres $p_1, \ldots, p_n$.
3. En déduire une preuve du théorème suivant : *il existe une infinité de nombres premiers.*

Exercice 15 (Absurde). Montrer que pour tout nombre premier p, $\sqrt{p}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 16. Donner deux preuves différentes de l'énoncé suivant : *Pour tout entier naturel n, le nombre $n(n+1)$ est pair.*

Exercice 17 (Suites périodiques convergentes). Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que u est périodique lorsque u vérifie :

$$\exists P \in \mathbb{N}^* \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+P} = u_n$$

1. La suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle périodique ? (on pourra utiliser le fait que π est irrationnel).
2. Donner un exemple de suite périodique non constante.
3. Montrer que toute suite périodique qui admet une limite finie est constante.
   On admettra la propriété suivante pour toute suite (u_n) réelle ou complexe.
   Si (u_n) converge vers un nombre réel ou complexe l , alors toute suite extraite de (u_n) est elle-même convergente vers l.

Exercice 18. On considère l'énoncé suivant : *il existe des nombres irrationnels a et b tels que a^b est rationnel.*
On propose la preuve suivante, qui utilise l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

> Posons $x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Alors x est soit rationnel soit irrationnel.
>
> **Cas 1.** Si x est rationnel. Alors en posant $a = b = \sqrt{2}$, on a trouvé deux nombres irrationnels tels que a^b est rationnel.
>
> **Cas 2.** x est irrationnel. Posons $a = x$ et $b = \sqrt{2}$ Alors a est irrationnel par hypothèse, et b est aussi irrationnel. Et on a :
>
> $$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2,$$
>
> qui est bien rationnel.

La preuve est-elle correcte ? Si oui, quelle stratégie de preuve est utilisée ?

3 Exercices d'approfondissement

Exercice 19 (Quantificateurs). On note i le nombre complexe imaginaire tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. On dit que deux nombres complexes z et z' forment un *système libre* si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda z + \mu z' = 0 \implies \lambda = \mu = 0).$$

1. Montrer que 1 et i forment un système libre.
2. Plus généralement, si $z = u + \mathrm{i}v$ et $z' = u' + \mathrm{i}v'$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $(u', v') \in \mathbb{R}^2$, montrer que z et z' forment un système libre si et seulement si $uv' - u'v \neq 0$.

Exercice 20 (Cardinalité). Soit E et F deux ensembles finis et de même cardinal, et soit $f : E \to F$ une application injective. Montrer que f est bijective. Même question pour $g : E \to F$ qu'on suppose surjective.

Exercice 21 (Ensembles).

1. Soit A un ensemble, qui est soit vide soit un singleton (c'est-à-dire un ensemble ayant un unique élément). Prouver l'énoncé suivant :

$$\forall X \in \mathcal{P}(A) \quad (X \subseteq A \implies (X = \emptyset \vee X = A))$$

2. Réciproquement, soit A un ensemble vérifiant la propriété ci-dessus. Montrer que $A = \emptyset$ ou A est un singleton.

Exercice 22 (Ensembles). Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Que dire de l'ensemble suivant :

$$\mathcal{P}(A \setminus B) \setminus \big(\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)\big).$$

Exercice 23 (Récurrences). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f, avec la convention habituelle $f^{(0)} = f$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + 2xf(x) = 0,$$

puis pour tout entier $n \geq 2$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) + 2xf^{(n-1)}(x) + 2(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

2. En déduire que, pour tout entier n :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = e^{-x^2} H_n(x),$$

où H_n est une fonction polynôme de degré n et dont le monôme de plus haut degré est $(-2)^n x^n$.

3. Montrer que la suite $(H_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad H_n(x) + 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x) = 0.$$

Exercice 24 (Principe de récurrence forte). Soit $P(n)$ une propriété portant sur un entier n.

1. Montrer que :

$$\big(\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)\big) \text{ si et seulement si } \big(\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \{0, \dots, n\} \quad P(k)\big)$$

2. En déduire la validité de la technique de *récurrence forte* : si $P(0)$ est vraie, et si, pour tout entier $n \geq 0$ l'implication suivante est vraie :

$$\big(\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad P(k)\big) \implies P(n+1)$$

alors la propriété $\big(\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)\big)$ est vraie.

Exercice 25 (Unicité). Soit $f : X \to Y$ une application. Pour chaque $y \in Y$, on considère l'énoncé $P_y(x)$ défini ainsi :

$$P_y(x): \quad f(x) = y$$

où x est une variable libre prenant ses valeurs dans X. Montrer que f est injective si et seulement $P_y(x)$ a la propriété d'unicité pour chaque $y \in Y$. A quelle condition sur $P_y(\cdot)$ l'application f est-elle bijective ?

Exercice 26 (Ensembles). Soit E un ensemble. On note $A^c = E \setminus A$, le complémentaire de A dans E, pour toute partie A de E. On définit l'opération $\star : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ en posant, pour toutes parties A et B de E :

$$A \star B = A^c \cap B^c.$$

1. L'opération $\star$ est-elle associative ?
2. Donner une expression de A^c à l'aide de l'opération $\star$ et de l'ensemble vide.
3. Montrer que $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, et en déduire une expression de $A \cup B$ utilisant le seul symbole $\star$.
4. Montrer que $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, et en déduire une expression de $A \cap B$ utilisant le seul symbole $\star$.

4 Exercices d'évaluation

Exercice 27 (Contrôle Math/Math-Info 2019). Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Écrire la contraposée de l'implication précédente.
3. Montrer cette deuxième implication sans recourir au premier résultat.

Exercice 28 (Contrôle 2019). Soit p un nombre entier naturel. Montrer que $p(p+1)(p+2)$ est divisible par 2 et par 3.

Exercice 29 (Contrôle 2019). On considère lorsque $n \geq 1$ la somme

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

.

Montrer par récurrence pour tout $n \geq 1$ la formule

$$S_n := \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Exercice 30 (Contrôle 2019).

1. Écrire la négation de l'énoncé 'Tout nombre premier est impair".

2. Montrer si cet énoncé est vrai ou faux.

Exercice 31 (Examen 2019). Montrer par contraposition la proposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x^3 \text{ est pair } \implies x \text{ est pair.}$$

Exercice 32 (Contrôle 2019). On étudie l'assertion

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x < y) \Longrightarrow (\exists z \in \mathbb{R} \qquad x < z < y).$$

1. Illustrer l'assertion par un schéma sur la droite des réels.

2. Donner la valeur de vérité de l'assertion et justifier votre réponse.

3. Écrire la contraposée de l'implication $(x < y) \Longrightarrow (\exists z \in \mathbb{R} \qquad x < z < y)$.

4. Si l'on remplace l'ensemble $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$, la valeur de vérité de l'assertion reste-t-elle la même ? Autrement dit, quelle est la valeur de vérité de l'assertion suivante ?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \qquad (x < y) \Longrightarrow (\exists z \in \mathbb{Z} \qquad x < z < y).$$

   Justifier votre réponse.

Feuille d'exercices n° 3

Relations

1 Notions du cours

Relations binaires : définition, relation symétrique, réflexive, transitive. Relation de préordre, relation d'ordre. Majorant, minorant, borne supérieure et borne inférieure (notations $a \vee b$ et $a \wedge b$), ordre total. Applications croissantes. Relation d'équivalence. Classes d'equivalence, ensemble quotient, partition, projection canonique. Définition d'une application sur un ensemble quotient par "passage au quotient".

2 Exercices d'entraînement

2.1 Relations binaires

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, indiquer si la relation $\mathcal{R}$ sur E est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, d'ordre total.

1. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y \iff x = -y$.
2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$.
3. $E = \mathbb{Z}$ et $x\mathcal{R}y \iff x|y$. Idem avec $E = \mathbb{N}$.
4. $E = \mathcal{P}(X)$, avec X un ensemble non vide, et $A\mathcal{R}B \iff \big((A = B) \vee (A = X \setminus B)\big)$.

2.2 Relations d'ordre

Exercice 2 (ordre sur l'ensemble des parties). Soit X un ensemble et soit $E = \mathcal{P}(X)$. On munit E de la relation d'inclusion $\subseteq$.

1. Montrer que $(E, \subseteq)$ est un ordre partiel, qui n'est pas total dès que E a au moins deux éléments distincts.
2. Montrer que $(E, \subseteq)$ est un *treillis*, c'est-à-dire que toute famille de E admet un plus petit et un plus grand élément dans $(E, \subseteq)$. Préciser en particulier $A \vee B$ et $A \wedge B$ pour cet ordre.

Exercice 3 (divisibilité). Soit $E = \mathbb{N}$ qu'on munit de la relation de divisibilité $|$. Montrer que $(E, |)$ est un ordre partiel qui n'est pas total. Déterminer si $a \vee b$ et $a \wedge b$ existent pour tous entiers a et b, et dans ce cas les reconnaître avec le vocabulaire de l'arithmétique. Que deviennent ces résultats si $E = \mathbb{Z}$?

Exercice 4 (ordre opposé). Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On définit la relation $\leq'$ par $x \leq' y \iff y \leq x$. Montrer que $(E, \leq')$ est un ordre partiel (appelé *ordre opposé*).

Exercice 5. L'objet de cet exercice est d'étudier les deux relations sur $E = \mathbb{R}^2$ définies par :

$$(x, y)\ \mathcal{R}_1\ (x', y') \iff \big(x \leq x' \wedge y \leq y'\big)$$
$$(x, y)\ \mathcal{R}_2\ (x', y') \iff \big((x < x') \vee (x = x' \wedge y \leq y')\big)$$

1. Étude de $\mathcal{R}_1$

(a) Montrer que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{C}_{(x_0,y_0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x_0,y_0)\ \mathcal{R}_1\ (x,y)\}$.
(c) Montrer que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}_1)$ n'est pas un ordre total.

2. Étude de $\mathcal{R}_2$

   (a) Montrer que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que la relation d'ordre $\mathcal{R}_1$ est plus fine que la relation d'ordre $\mathcal{R}_2$.

Exercice 6 (Ordre entre applications). Soient X et Y deux ensembles non vides et $\leq$ une relation d'ordre sur Y. Sur l'ensemble $\mathcal{F}(X,Y)$ des applications de X vers Y on considère la relation $\leq_{\mathcal{F}}$ définie par

$$f \leq g \iff \big(\forall x \in X \quad f(x) \leq g(x)\big).$$

1. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(X,Y)$.
2. Prenons $Y = \{0,1\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{F}(X,Y)$ s'identifie à $\mathcal{P}(X)$ *via* une bijection $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X,Y)$ qu'on précisera.
   (b) Montrer que la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathcal{F}(X,\{0,1\})$ induit une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(X)$. Identifier cette relation.

2.3 Relations d'équivalence

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, montrer qu'on obtient une relation d'équivalence $\sim$ sur E. Identifier l'ensemble quotient dans chacun des cas.

1. $E = \mathbb{R}$ et $x \sim y$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + \alpha k$, où α est un réel fixé à l'avance (par exemple $\alpha = 2\pi$).
2. $E = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ et $(a,b) \sim (c,d)$ si $ad = bc$.
3. E est l'ensemble des droites du plan et $d \sim d'$ si $d \parallel d'$.
4. $E = \mathbb{R}^2$ et $x \sim y$ si $s - y \in \mathbb{Z}^2$.
5. $E = \mathbb{C}$ et $z \sim z'$ si $|z| = |z'|$.

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, E et Y sont deux ensembles, $f : E \to Y$ est une application, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence définie sur E et $\pi : E \to E/\mathbb{R}$ est la projection canonique. Montrer que la fonction f passe au quotient et permet de définir une fonction $\overline{f} : E/\mathcal{R} \to Y$ telle que $\overline{f} \circ \pi = f$.

1. Pour n un entier pair, $E = \mathbb{Z}$, $x\mathbb{R}y \iff x = y \mod n$, $Y = \{0,1\}$ et $f(x) = x \mod 2$.
2. E est un ensemble quelconque, $f : E \to Y$ est une application quelconque, et $\mathcal{R}$ est la relation d'égalité.
3. Soit Σ un alphabet (ensemble fini non vide), $E = \Sigma^*$ est l'ensemble des mots sur Σ. On note $[x]_a$ le nombre d'occurrences de la lettre $a \in \Sigma$ dans le mot x.
   (a) On fixe $a_0 \in \Sigma$ et on définit $f : E \to \mathbb{N}$ par $f(x) = [x]_{a_0}$ et $\mathcal{R}$ est définie par :
   $$x\mathcal{R}y \iff \big(\forall a \in \Sigma \quad [x]_a = [y]_a\big).$$
   (b) Montrer que la concaténation $\Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ passe au quotient pour la relation $\mathcal{R}$.

4. Soit $E = \mathbb{R}^2$, posons $H = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x - 3y = 0\}$, et $u\mathcal{R}v \iff v - u \in H$. On pose $Y = \mathbb{R}$ et $f : E \to Y$ est définie par $f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = 2x - 3y$.
5. $E = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff ad - bc = 0$. On pose $\mathbb{Q} = E/\mathcal{R}$. Montrer qu'on définit bien une application $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ en posant $(a,b) + (c,d) = (ad + bc, cd)$ et en passant au quotient. En vérifier la commutativité et l'associativité. Idem pour la multiplication $times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ en posant $(a,b) \times (c,d) = (ac, bd)$.
6. Proposer une façon de définir l'addition et la multiplication modulo n.

3 Exercices d'approfondissement

3.1 Relations binaires

Exercice 9. Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^\star$ éléments. Combien de relations binaires peut-on définir sur E? Combien de relations binaires réflexives peut-on définir sur E?

Exercice 10 (Restriction d'une relation). Soit E un ensemble non vide et considérons $A \in \mathcal{P}(E)$ et $R \subset E \times E$ une relation binaire sur E. La relation $R_A = R \cap A \times A$ s'appelle restriction de R à A. Montrer que si R est refléxive/symétrique/antisymétrique/transitive alors R_A l'est aussi.

3.2 Relations d'ordre

Exercice 11 (Ordre lexicographique). Soit $(\mathbb{R}, \leq)$ l'ensemble ordonné des réels et considérons $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout couple $(f,g) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ telle que $f \neq g$ on considère

$$k(f,g) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$$

Sur $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ on considère la relation $\preceq$ définie par

$$f \preceq g \quad \text{si et seulement si} \quad f = g \text{ ou } \big(f \neq g \text{ et } f(k(f,g)) \leq g(k(f,g))\big).$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Exercice 12 (Relation d'ordre stricte).

1. Soit $\leq$ une relation d'ordre sur X. On va définir à partir de $\leq$ une nouvelle relation notée $<$ donnée par
$$\forall x, y \in X, \ x < y \quad \text{si et seulement si} \quad x \leq y \text{ et } x \neq y.$$
Montrer que la relation $<$ vérifie les propriétés suivantes
P1) $\forall x \in X$, $x \not< x$.
P2) $\forall x, y \in X$, $(x < y \Rightarrow y \not< x)$.
P3) $<$ est transitive.
P4) $\forall x, y, z \in X$, $[(x \leq y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)]$.
P5) $\forall x, y \in X, [(x \leq y) \iff (x < y) \vee (x = y)]$.
2. On considère une relation $<$ sur X qui vérifie P1), P2) et P3). Montrer que la relation $\leq$ définie par
$$\forall x, y \in X \quad x \leq y \quad \text{si et seulement si} \quad x < y \text{ ou } x = y$$
est une relation d'ordre sur X.

Exercice 13 (Applications réelles croissantes). Soient f et g des applications décroissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(f(x)) \geqslant x \text{ et } f(g(x)) \geqslant x$$

Montrer que :

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad f\big(g(f(x))\big) = f(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad g\big(f(g(x))\big) = g(x)$

(on pourra dans chaque cas montrer une double inégalité)

Exercice 14 (Applications croissantes). On considère $(X, \leq_X)$ respectivement $(Y, \leq_Y)$ deux ensembles ordonnés. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est *croissante* si :

$$\forall (x_1, x_2) \in X \times X \quad (x_1 \leq_X x_2) \implies \big((f(x_1) \leq_Y f(x_2)\big).$$

On dit que $f : X \to Y$ est un isomorphisme d'ordres si f est bijective et si f et f^{-1} sont croissantes.

1. Considérons $X = Y = \mathbb{N}$ avec X muni de l'ordre de divisibilité $|$ et Y muni de l'ordre naturel sur les entiers. Montrer que l'application identité $\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$:$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application croissante et bijective mais n'est pas un isomorphisme d'ordre.
2. Supposons que $f : X \to Y$ est un isomorphisme d'ordre. Montrer que :
   (a) X est total si et seulement si Y est total
   (b) Pour $a, b \in X$, $a \vee b$ existe si et seulement $f(a) \vee f(b)$ existe, et alors $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.
3. Supposons que X est un ordre total. Soit $f : X \to Y$ une application croissante. Montrer que si f est bijective, alors f^{-1} est croissante. En déduire que si X est un ordre total, un isomorphisme d'ordres $f : X \to Y$ est caractérisé par : f est bijective et croissante.

3.3 Relations d'équivalence

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow y = y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 16. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E réflexive et transitive. On définit les deux relations :

$$\begin{array}{rcl} x\mathcal{S}y & \Longleftrightarrow & (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x), \\ x\mathcal{T}y & \Longleftrightarrow & (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x). \end{array}$$

Est-ce que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des relations d'équivalence ?

Exercice 17. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x + y$ est pair. Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation ?

Exercice 18. Sur $\mathbb{R}$ on considère la relation d'équivalence $x \sim y$ si $xy > 0$. Décrire $\mathbb{R}/\sim$.

4 Exercices d'evaluation

4.1 Relations binaires

Exercice 19. Étudier les propriétés des relations suivantes. Dans le cas d'une relation d'équivalence, préciser les classes ; dans le cas d'une relation d'ordre, préciser si elle est totale, si tout ensemble admet un plus petit ou plus grand élément.

1. Dans $\mathcal{P}(E)$:
   $A\mathcal{R}_1B \Longleftrightarrow A \subset B$;
   $A\mathcal{R}_2B \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
2. Dans $\mathbb{Z}$:
   $a\mathcal{R}_3b \Longleftrightarrow a$ et b ont la même parité ;
   $a\mathcal{R}_4b \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\;\; a-b=3n$;
   $a\mathcal{R}_5b \Longleftrightarrow a-b$ est divisible par 3.

4.2 Relations d'ordre

Exercice 20. On considère $(E,\leq)$ un ensemble ordonné. Sur $E\times E$ on considère la relation $\preceq$ donnée par

$$(x_1,x_2)\preceq(y_1,y_2)\quad\text{si et seulement si}\quad[(x_1\leq x_2)\;\text{ et }\;(y_1\leq y_2)]\,.$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Si $\leq$ est totale, est-ce que $\preceq$ est totale?

Exercice 21. Soit $(E,\leq)$ un ensemble ordonné. Sur $\mathcal{P}(E)\setminus\emptyset$ on considère la relation

$$A\lesssim B\;\;\text{si et seulement si}\;\;\forall x\in A,\forall y\in B,\;x\leq y.$$

La relation $\lesssim$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)\setminus\emptyset$?

Exercice 22 (Ordre entre applications). On considère la relation sur l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par

$$f\;\mathcal{R}\;g\quad\Leftrightarrow\quad(\exists A\in\mathbb{R}^+,\forall x\in\mathbb{R},x>A\Rightarrow f(x)=g(x)).$$

1) Déterminer les propriétés de cette relation.
2) Expliciter le fait que $f\not\mathcal{R}g$.

4.3 Relations d'équivalence

Exercice 23. Étudier la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par:

$$f\mathcal{R}g\Longleftrightarrow\exists A>0,\forall x\in\mathbb{R},|x|>A\Rightarrow f(x)=g(x).$$

Exercice 24. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y\Longleftrightarrow xe^y=ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 25. Sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on considère la relation $\sim$ définie par

$$(m,n)\sim(p,q)\;\;\text{si}\;m+q=n+p.$$

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
b) Montrer que pour tout paire (m,n) il existe un p tel que $(m,n)\sim(p,0)$ ou $(m,n)\sim(0,p)$.
c) Construire une application bijective entre l'ensemble quotient $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash\sim$ et $\mathbb{Z}$.