Feuille d'exercices N° 1 : Logique et théorie des ensembles

Exercice 1) Compléter, *quand c'est possible*, avec les symboles $\in$ ou $\subseteq$.

(a) $0 \dots [0,1]$
(b) $a \dots \{a,b,c\}$
(c) $\{a\} \dots \{a,b,c\}$
(d) $\{a\} \dots \mathcal{P}(\{a,b,c\})$
(e) $\mathbb{N} \dots \mathcal{P}(\mathbb{R})$
(f) $[0,\frac{1}{2}[\dots [0,1] \cup [3,4]$
(g) $\emptyset \dots \{1,2,3\}$
(h) $\{\emptyset\} \dots \{1,2,3\}$
(i) $3 \dots [0,1] \cup \{3\}$
(j) $\frac{1}{2} \dots \{0,1\} \cup [3,4]$

Exercice 2) Le tableau suivant propose, par ligne, plusieurs descriptions d'un même ensemble. Compléter les cases vides *lorsque c'est possible*.

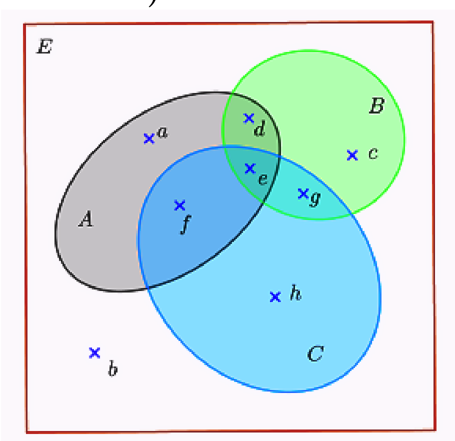
Extension	*Compréhension*	*Extension généralisée*	*Image d'une fonction*
$\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$			
	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+y=-1\}$		
		$\{1,3,...,2k+1,...\}$	
			$\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Exercice 3) Soit $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ et soient les parties suivantes de E :

$A = \{1,2,3,4\}$;
$B = \{4,5,6,7\}$;
$C = \{1,3,5,7\}$;
$D = \{2,3,4,5,6\}$.

Calculer $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$, $C_E(C_E A \cap D) \cap C_E(B \cup C)$ et $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 4)



Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. $\{a,f,d\} \subset A \cup C$ ☐ Vrai ☐ Faux
2. $\{e\} \subset A \cap B \cap C$ ☐ Vrai ☐ Faux
3. $c \in A \cap B^c$ ☐ Vrai ☐ Faux
4. $g \in A^c \cap B^c$ ☐ Vrai ☐ Faux
5. $g \in A^c \cup B^c$ ☐ Vrai ☐ Faux
6. $f \in C \setminus A$ ☐ Vrai ☐ Faux
7. $\{h,b\} \subset A^c \cap B^c$ ☐ Vrai ☐ Faux
8. $\{a,b,c,d,e,f,g,h\} \subset C \cup C^c$ ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 5) Soit E un ensemble, et A, B, C trois sous-ensembles de E.

1. Montrer l'égalité
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$
2. Montrer que si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$.

Exercice 6) On considère les sous-ensembles $A = [0, 1]$, $B = \{-1, 2\}$, $C = [-1, 2]$ de $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. $B \times B \subset A \times C$ ☐ Vrai ☐ Faux
2. $A \times B \subset A \times C$ ☐ Vrai ☐ Faux
3. $\{(x, x) \mid x \in A\} \subset A \times C$ ☐ Vrai ☐ Faux
4. $(A \cup B) \times (C \setminus B) = A \times C$ ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 7)

1. Traduire en français courant les propositions mathématiques suivantes :
   (a) $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}\ ;\ m > n$;
   (b) $\forall p \in \mathbb{Q},\ \forall q \in \mathbb{Q},\ q > p,\ \exists r \in \mathbb{Q}\ ;\ r \in]p, q[$;
2. Traduire en langage mathématique les phrases suivantes :
   (a) un entier relatif est toujours égal à la différence de deux entiers naturels ;
   (b) il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est égal à 2 ;
   (c) la fonction f n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$;
3. Maman dit à Nicolas : "Si tu ne ranges pas ta chambre, tu n'auras pas de chocolat". Nicolas range sa chambre, mais Maman ne lui donne pas de chocolat. Maman a-t-elle menti ?

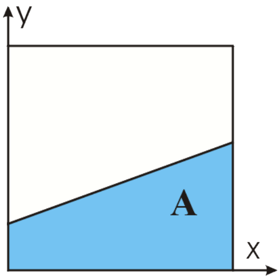
Exercice 8) En introduisant les notations adaptées, traduire en langage mathématique puis donner la négation des propositions suivantes :

1. toutes les voitures rapides sont rouges ;
2. toutes les voitures rapides sont polluantes ou chères ;
3. il existe un camion belge dont tous les pneus sont dégonflés.

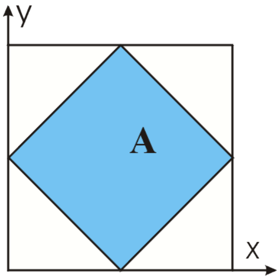
Exercice 9) Compléter chacune des propositions suivantes avec l'un des connecteurs logiques $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ de telle sorte qu'elle soit vraie. Lorsque c'est possible, on utilisera $\Leftrightarrow$. On ne demande pas de justifier les réponses.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2 = 4\ \ldots\ x = 2)$;
(b) $\forall z \in \mathbb{C}$, $(z = \bar{z}\ \ldots\ z \in \mathbb{R})$;
(c) $\forall n \in \mathbb{Z}$, (n^2 est multiple de 4 $\ldots$ n est multiple de 4).

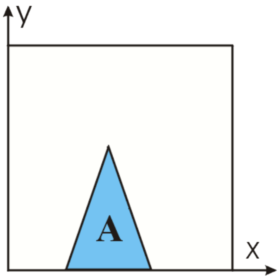
Exercice 10) On se place dans le carré $\mathcal{C} = [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^2$.
Indiquer, dans chacun des cas suivants, si les énoncés (a), (b), (c) ou (d) sont vrais ou faux - l'ensemble A étant le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ suggéré par le dessin.

1. 

   (a) $\forall x \;\; \exists y \;\; (x,y) \in A$.
   (b) $\forall y \;\; \exists x \;\; (x,y) \in A$.
   (c) $\exists y \;\; \forall x \;\; (x,y) \in A$.
   (d) $\exists x \;\; \forall y \;\; (x,y) \in A$.

2. 

   (a) $\forall x \;\; \exists y \;\; (x,y) \in A$.
   (b) $\forall y \;\; \exists x \;\; (x,y) \in A$.
   (c) $\exists y \;\; \forall x \;\; (x,y) \in A$.
   (d) $\exists x \;\; \forall y \;\; (x,y) \in A$.

3. 

   (a) $\forall x \;\; \exists y \;\; (x,y) \in A$.
   (b) $\forall y \;\; \exists x \;\; (x,y) \in A$.
   (c) $\exists y \;\; \forall x \;\; (x,y) \in A$.
   (d) $\exists x \;\; \forall y \;\; (x,y) \in A$.

Exercice 11) Soient P et Q deux affirmations. Par exemple, P pourrait être, $x > 2$ et Q pourrait être $x^2 > 3$. Dans ce cas $P \Rightarrow Q$. La négation $\neg P$ serait $x \leq 2$. Pour deux affirmations quelconques P et Q lesquelles des propositions suivantes sont équivalentes (il faut trouver 5 groupes) – on a omis "est vraie" un peu partout.

1. P implique Q
2. Q est suffisant pour que P soit vraie.
3. Q si P
4. P seulement si Q
5. $\neg P$ si et seulement si $\neg Q$
6. $P \Rightarrow Q$
7. $\neg P$ est nécessaire pour $\neg Q$
8. $P \Rightarrow \neg Q$
9. P est nécessaire et suffisante pour Q
10. $\neg Q$ seulement si P
11. Si Q est vraie alors P est fausse
12. P est fausse seulement si Q est fausse
13. $\neg P \Leftarrow Q$
14. $\neg P$ est nécessaire pour $\neg Q$
15. P est impliquée par Q fausse.

Exercice 12) Soit P, Q deux assertions mathématiques.
Montrer à l'aide de tables de vérité les équivalences suivantes :

1. $(\,\text{non}(P \text{ ou } Q)\,) \iff (\,\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)\,)$.
2. $(\,\text{non}(P \text{ et } Q)\,) \iff (\,\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\,)$.
3. (a) $(\,P \implies Q\,) \iff (\,\text{non}(P) \text{ ou } Q\,)$.
   (b) $(\,P \implies Q\,) \iff (\,\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)\,)$.
   (c) Déduire du (a) la négation de $(\,P \implies Q\,)$.

Exercice 13) Etant donnée une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la proposition suivante :
P : Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) = c$.

1. Ecrire la négation de la proposition P en utilisant les symboles mathématiques.
2. Parmi les propositions suivantes, dire celles qui sont équivalentes à P :
   (a) P_2 : $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall c \in \mathbb{R},\ f(c) = x$.
   (b) P_3 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$.
   (c) P_4 : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.
   (d) P_5 : $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$.
   (e) P_6 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(y)$.

Exercice 14) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduisez la phrase suivante en français :

$$\forall a \in \mathbb{R}\ :\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+\ :\ \exists \delta \in \mathbb{R}_*^+\ :\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Exercice 15) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimez en utilisant les symboles $\forall, \exists$ et $\Rightarrow$:
Pour tout nombres réels a et x et pour tout nombre réel positif ε il existe un nombre réel positif δ tel que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ lorsque $|x - a| < \delta$.
Est ce que cette formule dit la même chose que celle de l'exercice précédent ?

Exercice 16) Critiquer la preuve suivante
LEMME *Le nombre* 1 *est le plus grand nombre entier naturel.*
DÉMONSTRATION Soit n le plus grand entier naturel. Si $n > 1$ alors $n^2 > n$ et n^2 est un entier naturel cela contradit le fait que n est le plus grand, donc $n \leq 1$, et ainsi $n = 1$.