Fiche de cours : Logique et théorie des ensembles

Ensembles

✓ Une **partie** d'un ensemble E est un ensemble A dont tous les éléments appartiennent à E.

- On écrit $x \in A$ pour « x appartient à A » et $x \notin A$ signifie « x n'appartient pas à A ».
- On écrit $A \subset B$ pour « A est inclus dans B ».
- $\emptyset$ désigne la partie vide de E et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Attention, $\emptyset$ n'est pas ϕ (phi).

✓ **Opérations** sur les parties. Soit A, B des parties d'un ensemble E.

➢ Pour obtenir l'égalité $A = B$, on procède souvent en démontrant les inclusions $A \subset B$ et $B \subset A$.

Définitions :

Complémentaire :	$\complement_E A = \{x \in E \ ; \ x \notin A\}$
Réunion :	$A \cup B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$
Intersection :	$A \cap B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \in B\}$
Différence :	$A \setminus B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \notin B\}$

Propriétés :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$	$E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

✓ Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties non vides de E est une **partition** de E si :

1. $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$;
2. la réunion de toutes ces parties, notée $\bigcup_{i \in I} A_i$, est égale à E.

✓ Le **produit cartésien** $E \times F$ désigne l'ensemble de tous les couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Attention, (a, b) n'est pas $\{a, b\}$.

Propositions, quantificateurs, règles de logique

✓ Une **proposition** (ou **énoncé**, **assertion**) est une phrase mathématique dotée d'un sens.

– Une proposition peut être vraie (V) ou fausse (F).

A	non A
V	F
F	V

A	B	A ou B	A et B
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

[non A] : **négation** de A, noté parfois $\neg A$

[A ou B] : **disjonction** de A, B (« ou » inclusif)

[A et B] : **conjonction** de A, B.

✓ L'**implication** $A \Rightarrow B$ signifie : « Si A est vraie alors B est vraie ».

– Elle a même valeur de vérité que [(non A) ou B].

– Lorsque [$A \Rightarrow B$] est vraie, A est une **condition suffisante** pour B et B est une **condition nécessaire** pour A.

✓ L'**équivalence** $A \Leftrightarrow B$ est définie par la proposition : [$A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$].

– $A \Leftrightarrow B$ signifie que A et B ont mêmes valeurs de vérité, ou encore : « A est vraie **si et seulement si** B est vraie ».

La proposition :	est équivalente à :	
non(non A)	A	
non(A ou B)	(non A) et (non B)	
non(A et B)	(non A) ou (non B)	
$A \Rightarrow B$	(non B) $\Rightarrow$ (non A)	(Contraposition)
non($A \Rightarrow B$)	A et (non B)	

✓ Le **quantificateur** « $\exists$ » signifie « il existe » et le **quantificateur** « $\forall$ » signifie « quel que soit ».

– « il existe » est toujours synonyme de « il existe au moins un », et « il existe un unique » se note $\exists!$

La proposition :	est équivalente à :
$\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ A(x,y)$	$\exists y \in F,\ \exists x \in E,\ A(x,y)$
$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ A(x,y)$	$\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ A(x,y)$
non $\big(\exists x \in E,\ A(x)\big)$	$\forall x \in E, (\text{non } A(x))$
non $\big(\forall x \in E,\ A(x)\big)$	$\exists x \in E, (\text{non } A(x))$

MAIS [$\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ A(x,y)$] et [$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ A(x,y)$] NE SONT PAS ÉQUIVALENTES.

– Un objet affecté d'un $\exists$ dépend de tous les objets affectés de $\forall$ qui le précèdent dans l'énoncé.

✓ La notation $\{x \in E\ ;\ A(x)\}$ désigne l'ensemble des x appartenant à E et tels que $A(x)$ vraie.

Méthodes de raisonnements

Pour Démontrer :	On peut utiliser un raisonnement :
L'assertion A	• **Direct** : on cherche une assertion B qui est vraie et qui implique A • **Par l'absurde** : on suppose que A est fausse et on cherche une contradiction.
L'implication $A \Rightarrow B$	• **Direct** : on suppose que A est vraie et on démontre qu'alors B est vraie. • **Par contraposition** : on démontre l'implication $[(\text{non}\, B) \Rightarrow (\text{non}\, A)]$.
L'équivalence $A \Longleftrightarrow B$	• **Par double implication** : on démontre les implications $[A \Rightarrow B]$ et $[B \Rightarrow A]$.
L'assertion $[\forall n \in \mathbb{N},\ A(n)]$	• **Par récurrence** : on démontre l'**initialisation** et l'**hérédité** : – Initialisation : $A(0)$ est vraie ; – Hérédité : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'implication $[A(n) \Rightarrow A(n+1)]$ est vraie. Le **principe de récurrence** permet de conclure que $[\forall n \in \mathbb{N},\ A(n)]$ est vraie.

Variantes du raisonnement par récurrence :

➢ **Récurrence forte** :
- Initialisation : $A(0)$ est vraie ;
- Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'implication $[A(0)\ \text{et}\ A(1)\ \text{et}\ \ldots\ \text{et}\ A(n)] \Rightarrow A(n+1)$ est vraie.

➢ **Récurrence à deux pas** :
- Initialisation : $A(0)$ et $A(1)$ vraies ;
- Hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'implication $[A(n)\ \text{et}\ A(n+1)] \Rightarrow A(n+2)$ est vraie.

✓ Pour déterminer $S = \{x \in E\ ;\ A(x)\}$, on peut utiliser un raisonnement par **analyse-synthèse** :
1. **Analyse** : On cherche une proposition plus simple $B(x)$ qui est vraie lorsque $A(x)$ est vraie.
2. **Synthèse** : Parmi les x satisfaisant la proposition $B(x)$, on sélectionne ceux qui vérifient $A(x)$.

Notations pour somme et produit

✓ La **somme** et le **produit** d'une famille finie $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ de nombres réels sont notés :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$	$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$
$\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = (\prod_{k=1}^{n} a_k)(\prod_{k=1}^{n} b_k)$	$\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$

Factorielle d'un entier naturel :
$0! = 1$ et $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ si $n > 0$.

Cardinal d'un ensemble fini, Dénombrement

✓ Le **Cardinal** d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments qu'il contient : $\mathrm{Card}(E) \in \mathbb{N}$.

➢ Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.

➢ Si $A \subset B$ et B fini, alors : $[\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) \iff A = B]$.

Soit E, F des ensembles finis et A, B des parties de E.

$\mathrm{Card}(A \cup B) + \mathrm{Card}(A \cap B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$	$\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\complement_E A) = \mathrm{Card}(E)$
$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E).\mathrm{Card}(F)$	$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$
$\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$	$\mathrm{Card}(\mathcal{S}(E)) = \big(\mathrm{Card}(E)\big)!$

✓ Une p-**combinaison** dans un ensemble E est une partie de E de cardinal p.

➢ Si $\mathrm{Card}(E) = n$, alors le nombre de p-combinaisons est :

$$\text{(Coefficient binomial)} \qquad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } p \in [\![0, n]\!] \text{ et } \binom{n}{p} = 0 \text{ si } p > n.$$

➢ Pour tout $n \geq 1$ et tout $p \in [\![1, n]\!]$: $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.}$

➢ Les valeurs de $\binom{n}{p}$ s'obtiennent aussi à l'aide du triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									
3	1	3	3	1								
4	1	4	6	4	1							
5	1	5	10	10	5	1						
6	1	6	15	20	15	6	1					
7	1	7	21	35	35	21	7	1				
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

➢ Les coefficients binomiaux interviennent dans la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}$$