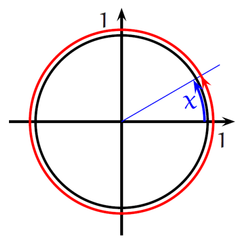
Cours

Formulaire de trigonométrie avec démonstration

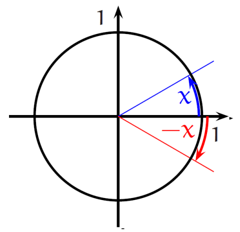
1 Formules démontrées par construction sur le cercle trigonométrique

Dans cette section, on considère un réel x quelconque.



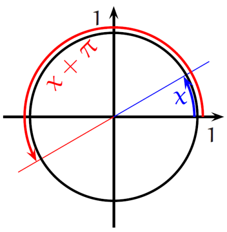
La fonction cos est 2π-périodique : $\cos(x+2\pi) = \cos x$. La fonction sin est 2π-périodique : $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

La construction pour $x + 2\pi$ est identique à celle pour x car le cercle trigonométrique a pour circonférence 2π. D'où les formules pour cos et sin.
On a la même formule pour tan mais on a mieux car la fonction tan est π-périodique.



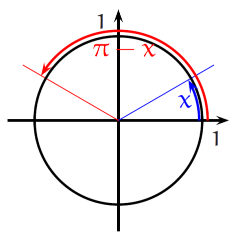
La fonction cos est paire : $\cos(-x) = \cos x$. La fonction sin est impaire : $\sin(-x) = -\sin x$. La fonction tan est impaire : Si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(-x) = -\tan x$.

La construction pour $-x$ se déduit de celle pour x par la symétrie d'axe l'axe des abscisses. $M(a,b)$ est transformé par cette symétrie en $M'(a,-b)$, d'où les formules pour cos et sin. La formule pour tan s'en déduit.



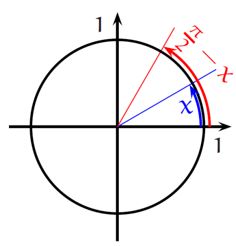
$\cos(\pi + x) = -\cos x$. $\sin(\pi + x) = -\sin x$. La fonction tan est π-périodique : Si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(x+\pi) = \tan x$.

La construction pour $\pi + x$ se déduit de celle pour x par une rotation de centre l'origine et d'angle π, c'est-à-dire la symétrie centrale de centre l'origine. $M(a,b)$ est transformé par cette symétrie en $M'(-a,-b)$, d'où les formules pour cos et sin. La formule pour tan s'en déduit.



$\cos(\pi - x) = -\cos x$. $\sin(\pi - x) = \sin x$. Si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$.

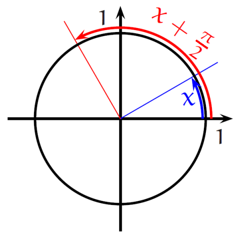
La construction pour $\pi - x$ se déduit de celle pour x par la symétrie d'axe l'axe des ordonnées. $M(a,b)$ est transformé par cette symétrie en $M'(-a,b)$, d'où les formules pour cos et sin. La formule pour tan s'en déduit.



$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$. Si $x \not\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \dfrac{1}{\tan x}$.

La construction pour $\frac{\pi}{2} - x$ se déduit de celle pour x par la symétrie d'axe la première bissectrice (droite d'équation x=y). $M(a, b)$ est transformé par cette symétrie en $M'(b, a)$, d'où les formules pour cos et sin. La formule pour tan s'en déduit.

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x.$
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x.$
Si $x \not\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\dfrac{1}{\tan x}.$



La construction pour $\frac{\pi}{2} + x$ se déduit de celle pour x par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. $M(a, b)$ est transformé par cette rotation en $M'(-b, a)$ d'où les formules pour cos et sin. La formule pour tan s'en déduit.

Remarque : toutes les formules pour la tangente peuvent aussi se démontrer en revenant à sa construction.

2 Formules d'Euler

Pour tout réel x : $\cos x = \dfrac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2i}.$

En effet, pour tout réel x, $e^{i\,x} = \cos x + i\,\sin x$ et $e^{-i\,x} = \cos x - i\,\sin x$.
Donc $e^{i\,x} + e^{-i\,x} = 2\cos x$ et $e^{i\,x} - e^{-i\,x} = 2i\,\sin x$.

3 Formule de Moivre

Pour tout réel x : $(\cos x + i\,\sin x)^n = \cos(nx) + i\,\sin(nx)$.

Cette formule s'écrit avec l'exponentielle complexe $\left(e^{i\,x}\right)^n = e^{i\,nx}$.

4 Formules d'addition

Dans cette section, on considère des réels a et b quelconques.

a. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \mathrm{Re}(e^{i\,x})$.
En particulier, $\cos(a + b) = \mathrm{Re}(e^{i\,(a+b)})$.
Comme $e^{i\,(a+b)} = e^{i\,a}\ e^{i\,b} = (\cos a + i\,\sin a)(\cos b + i\,\sin b)$.
Donc $e^{i\,(a+b)} = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i\,(\sin b \cos a + \sin a \cos b)$ (I).
Il suit $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

b. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

De même, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \mathrm{Im}(e^{i\,x})$.
Donc d'après l'égalité (I), $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

c. $\boxed{\begin{array}{l}\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{array}}$

Il suffit de remplacer b par $-b$ dans les formules précédentes.

On a alors $\cos(a-b)=\cos a\cos(-b)-\sin a\sin(-b)$.

Comme la fonction cos est paire et sin est impaire, $\cos a - b = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.

On procède de la même manière pour $\sin(a-b)$.

d. $\boxed{\begin{array}{l}\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a\\ \sin 2a=2\sin a\cos a\end{array}}$

En remplacant dans les formules d'addition b par a.

On a alors : $\cos(a+a)=\cos 2a=\cos a\cos a-\sin a\sin a=\cos^2 a-\sin^2 a$.

Sachant que $\cos^2 a+\sin^2 a=1$, on peut également dire que :
$\cos 2a = 2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$.

On utilise le même raisonnement pour $\sin 2a$.

e. $\boxed{\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}}$

La formule est définie si a, b et $a-b$ ne sont pas congrus à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

Pour tout réel $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Donc, d'après les formules d'addition vues précédemment :

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\frac{\cos a\cos b(\tan a+\tan b)}{\cos a\cos b(1-\tan a\tan b}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

f. $\boxed{\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}}$

La formule est définie si a, b et $a-b$ ne sont pas congrus à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

On l'obtient par remplacement de b par $-b$ dans la formule précédente puis en utilisant que la fonction tan est impaire.

g. $\boxed{\tan(2a)=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}$

La formule est définie si $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Il suffit de remplacer b par a dans la formule d'addition.

5 Formules de linéarisation (transformation d'un produit en somme)

Dans cette section, on considère des réels a et b quelconques.

a. $\boxed{\cos a\ \cos b=\dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}}$

On sait que $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
Il suit que $\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos a \cos b$.
Donc $\cos a \ \cos b = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$.

b. $\boxed{\sin a \ \sin b = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}}$

En reprenant le raisonnement précédent $\cos(a-b)-\cos(a+b) = 2\sin a \ \sin b$
donc $\sin a \sin b = \dfrac{\cos a - b - \cos ab}{2}$.

c. $\boxed{\sin a \ \cos b = \dfrac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}}$

On sait que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\sin(a-b)+\sin(a+b) = 2\sin a \cos b$, donc $\sin a \cos b = \dfrac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$.

d. $\boxed{\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}}$

On sait que $\cos a \ \cos b = \dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
En remplacant b par a , on obtient : $\cos^2 a = \dfrac{\cos 0 + \cos 2a}{2} = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$.

e. $\boxed{\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}}$

On sait que $\sin a \sin b = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$,
donc de la même manière : $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

f. $\boxed{\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}}$

La formule est définie si $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$.
$\tan^2 a = \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$.

6 Formules de factorisation (transformation d'une somme en produit)

Dans cette section, on considère des réels a et b quelconques.

a. $\boxed{\cos a + \cos b = 2 \ \cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \ \cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}$

On sait que pour tous réels x et y, $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$

On remplace x par $\dfrac{a+b}{2}$ et y par $\dfrac{a-b}{2}$, alors $x-y=b$ et $x+y=a$.
On a donc $\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ \cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)=\dfrac{\cos a+\cos b}{2}$.
D'où la formule.

b. $\boxed{\cos a-\cos b=-2\ \sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ \sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}$

On sait que pour tous réels x et y, $\sin x\sin y=\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
On remplace x par $\dfrac{a+b}{2}$ et y par $\dfrac{a-b}{2}$, alors $x-y=b$ et $x+y=a$.
On a donc $\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ \sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)=\dfrac{\cos b-\cos a}{2}$.
D'où la formule.

c. $\boxed{\sin a+\sin b=2\ \sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ \cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}$

Même méthode avec la formule $\sin x\cos y=\dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$

d. $\boxed{\sin a-\sin b=2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}$

On remplace b par $-b$ dans la formule précédente.

7 Formules dites d'arc moitié

Dans cette section, on considère un réel a quelconque tel que $\tan\dfrac{a}{2}$ est défini c'est-à-dire $a\not\equiv\pi\ [2\pi]$.
On pose alors $t=\tan\dfrac{a}{2}$.

Rappel

$\boxed{\text{Si } x\not\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\ \text{ alors }\ 1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}}$

En effet, $1+\tan^2 x=1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}\big(\cos^2 x+\sin^2 x\big)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

a. $\boxed{\cos a=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$

En utilisant le rappel précédent pour $x=\dfrac{a}{2}$, on obtient $1+t^2=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{a}{2}}$.

On obtient alors : $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}\right)\cos^2\left(\dfrac{a}{2}\right)=\cos^2\left(\dfrac{a}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{a}{2}\right)=$
$\cos a$.
On a appliqué la définition de la tangente puis la formule $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

b. $\boxed{\sin a = \dfrac{2t}{1+t^2}}$

En utilisant à nouveau $1+t^2 = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{a}{2}}$

On a $\dfrac{2t}{1+t^2} = 2\tan\left(\dfrac{a}{2}\right)\cos^2\left(\dfrac{a}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) = \sin a$.

On a appliqué la définition de la tangente puis la formule $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

c. $\boxed{\tan^2 a = \dfrac{2t}{1-t^2}}$

On sait que pour tout x réel, $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

Donc pour $x = \dfrac{a}{2}$, $\tan a = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}} = \dfrac{2t}{1-t^2}$