

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

Travail Encadré de Recherche

Théorème de Tarski-Seidenberg

Léo KAMMERLOCHER
Juin 2019

Sous la supervision de
André BELOTTO

Master Mathématiques & Applications

Contents

1	Introduction	2
2	Ensembles semi-algébriques	3
3	Théorème de Tarski-Seidenberg	6
3.1	Énoncé du Théorème	6
3.2	Théorème de Décomposition Cellulaire	7
3.3	Exemples de décomposition cellulaires	9
3.4	Démonstration du Théorème 3.1	13
3.5	Démonstration du Théorème 3.3	15

1 Introduction

Dans cet écrit, nous allons étudier les notions d'ensembles et d'applications semi-algébriques. Notre objectif principal est de présenter et de démontrer le théorème 3.1 de Tarski-Seidenberg. Pour cela, nous avons besoin d'étudier le théorème 3.3 de décomposition cellulaire et son corollaire 3.4. Tout au long de ce TER, nous allons aborder certaines applications des résultats et concepts étudiés et plusieurs exemples pour illustrer les définitions, théorèmes et leurs démonstrations.

Le théorème 3.3 de décomposition cellulaire que nous utilisons est tiré de la version de [BM], mais il est plus faible que celui étudié dans le document de [VdD]. En effet, Van den Dries a besoin d'un résultat plus fort pour d'autres applications mais la version de Bierstone Milman suffit pour la démonstration de Tarski-Seidenberg. Il nous suffisait de généraliser le théorème de décomposition cellulaire 3.3 au corollaire 3.4, que nous avons démontré d'une façon qui n'est pas présente dans les documents étudiés.

Pour comprendre le théorème 3.1 de Tarski-Seidenberg, on a dû comprendre la notion d'ensembles et d'applications semi-algébriques à l'aide des définitions données dans les références [BM, VdD]. On a vu et étudié différentes applications semi-algébriques dans les exemples 1, 2 et 3 et une application du théorème 3.1 de Tarski-Seidenberg dans la démonstration du lemme 3.2 pour montrer une situation dans laquelle ce théorème peut être utile. On a ensuite étudié le théorème 3.3 de décomposition cellulaire et son corollaire 3.4 qui nous ont servi pour écrire la démonstration du théorème de 3.1 Tarski-Seidenberg (voir la partie 3.5). On a donc étudié deux applications du théorème 3.3 de décomposition cellulaire, dans les exemples 4 et 5 pour comprendre son utilité, puis nous avons démontré le corollaire 3.4 en admettant le théorème 3.3 de décomposition cellulaire. Il n'y a pas de démonstrations détaillées du corollaire 3.4 dans les références étudiées, on a donc, à l'aide de l'idée donnée dans la référence de Bierstone-Milman [BM], écrit une démonstration complète et détaillé de ce corollaire. On a ensuite proposé une démonstration du théorème 3.3 de décomposition cellulaire en suivant la démonstration de Van den Dries [VdD], mais en utilisant les notations du document de Bierstone-Milman [BM] pour simplifier la compréhension de celles de la référence de Van den Dries. Pour cette démonstration nous avons démontré deux lemmes 3.6 et 3.7 que Van den Dries utilise dans sa démonstration, tout en utilisant le corollaire 3.4 du document de Bierstone-Milman qui a permis de grandement simplifier les notations utilisées et de modifier l'écriture de cette démonstration.

2 Ensembles semi-algébriques

Pour pouvoir comprendre le théorème de Tarski-Seidenberg que nous citerons dans la partie 3.1, il faut d'abord étudier la notion de semi-algébrique.

Définition 2.1. *Un sous-ensemble semi-algébrique de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ défini par une combinaison booléenne d'équations et d'inéquations polynômiales à coefficients réels.*

Autrement dit, les sous-ensembles semi-algébriques de \mathbb{R}^n forment la plus petite famille SA_n de sous-ensemble de \mathbb{R}^n tels que :

1. Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n, P(x) = 0\} \in SA_n$
et $\{x \in \mathbb{R}^n, P(x) > 0\} \in SA_n$.
2. Si $A \in SA_n$ et $B \in SA_n$, alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $\mathbb{R}^n \setminus A$ sont dans SA_n .

Notation 1. Notons basiques, les ensembles $\{x \in \mathbb{R}^n, P(x) = 0\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n, P(x) > 0\}$.

Proposition 2.2. *$X \subset \mathbb{R}^n$ est semi-algébrique si et seulement si il existe des polynômes $f_{ij}(x)$ et $g_{ij}(x)$, avec $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ tels que :*

$$X = \cup_{i=1}^p \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0 \quad \text{et} \quad g_{ij} > 0, j = 1, \dots, q_i\}$$

Proof. Supposons que X est semi-algébrique, alors X est soit un basique, soit une union, complémentaire ou une intersection de semi-algébriques, on peut donc l'écrire comme une union d'intersections de basiques. Il faut montrer que cette écriture est stable par union, intersection et prise du complémentaire. Soient

$$A = \cup_{i=1}^p \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0 \quad \text{et} \quad g_{ij}(x) > 0, j = 1, \dots, q_i\}$$

$$B = \cup_{i=1}^{p'} \{x \in \mathbb{R}^n : f'_i(x) = 0 \quad \text{et} \quad g'_{ij}(x) > 0, j = 1, \dots, q'_i\}$$

On a alors

$$A \cup B = \cup_{i=1}^{p+p'} \{x \in \mathbb{R}^n, \tilde{f}_i(x) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{ij}(x) > 0, j = 1, \dots, \tilde{q}_i\}$$

avec

$$\tilde{f} = f_i(x) \quad \text{si} \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad \text{et} \quad \tilde{f} = f'_{i-p}(x) \quad \text{sinon}$$

et

$$\tilde{g} = g_{ij}(x) \quad \text{si} \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad \text{et} \quad \tilde{g}'_{(i-p)j}(x) \quad \text{sinon.}$$

Et avec $\tilde{q}_i = q_i$ si $i \in \{1, \dots, p\}$ et $\tilde{q}_i = q'_{i-p}$ sinon.

Pour l'intersection $A \cap B$ est une intersection d'union, or l'intersection est distributive sur l'union, par conséquent $A \cap B$ s'écrit comme union d'intersection de basique et donc comme dans l'énoncé de la proposition 2.2. En effet, si on a A, B, C et D des ensembles de \mathbb{R}^n , alors :

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$$

Pour le passage au complémentaire,

$$A^c = \bigcap_{i=1}^p \{x \in \mathbb{R}^n, f_i(x) < 0 \text{ ou } f_i(x) > 0 \text{ ou } g_{ij}(x) \leq 0, j = 1, \dots, q\}$$

est une intersection d'union de basiques donc comme vu précédemment on peut l'écrire comme dans l'énoncé de la proposition 2.2.

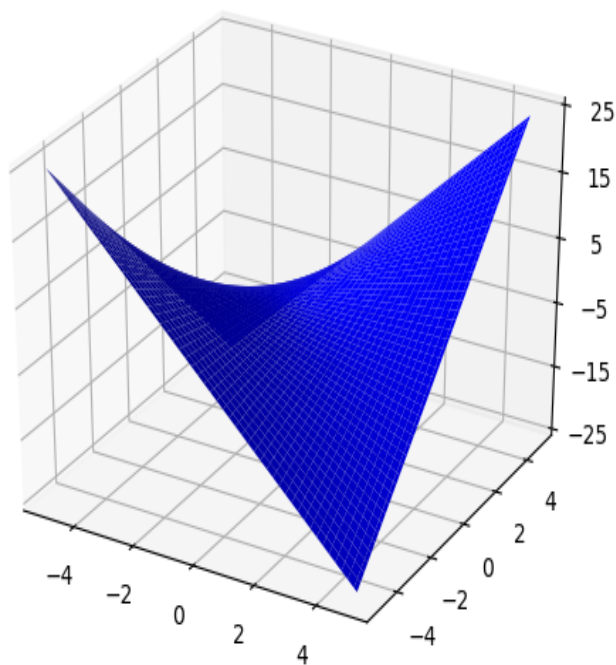
Supposons qu'il existe des polynômes $f_{ij}(x)$ et $g_{ij}(x)$, avec $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$, tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^p \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0 \text{ et } g_{ij} > 0, j = 1, \dots, q\}.$$

X est alors semi-algébrique car c'est une union d'intersections de semi-algébriques donc une union de semi-algébrique. \square

Définition 2.3. Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un semi-algébrique. Une application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-algébrique si son graphe $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ est semi-algébrique.

Exemple 1. Le produit $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $p(x, y) = xy$ est une application semi-algébrique.



En effet,

$$\Gamma(p) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy = z\} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z - xy = 0\}$$

$z - xy$ est un polynôme de \mathbb{R}^3 donc $\Gamma(p)$ est semi-algébrique ce qui montre que p est semi-algébrique.

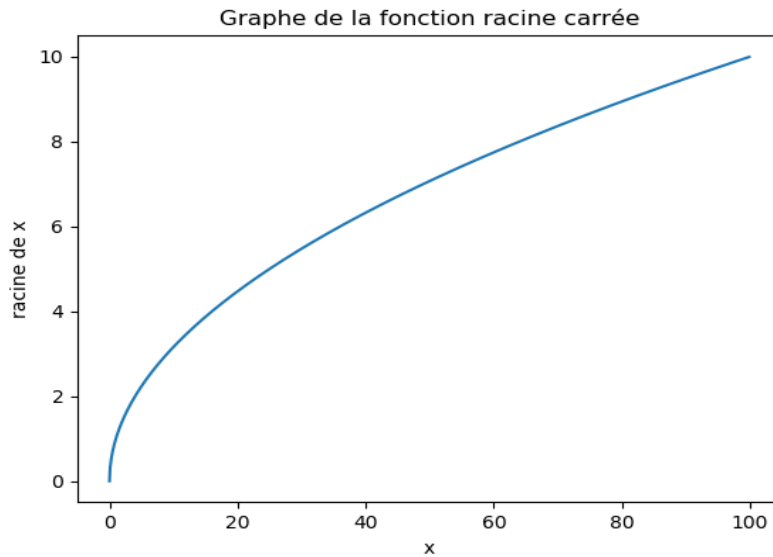
Exemple 2. Soit P une fonction polynômiale de \mathbb{R}^n alors P est une application semi-algébrique.

En effet,

$$\Gamma(P) := \{(X, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, P(X) = y\} := \{(X, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, P(X) - y = 0\}$$

$P(X) - y$ est un polynôme de \mathbb{R}^{n+1} donc $\Gamma(P)$ est semi-algébrique et par conséquent P est semi-algébrique.

Exemple 3. La fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui à $x \in \mathbb{R}^+$ associe sa racine est semi-algébrique.



En effet,

$$\begin{aligned} \Gamma(\sqrt{\cdot}) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x \text{ et } y \geq 0 \text{ et } x \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - x = 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } x \geq 0\} \end{aligned}$$

$y^2 - x$, x et y sont des polynômes de \mathbb{R}^2 donc $\Gamma(\sqrt{\cdot})$ est une intersection d'ensembles semi-algébriques par conséquent la fonction racine carrée est semi-algébrique.

3 Théorème de Tarski-Seidenberg

3.1 Énoncé du Théorème

Théorème 3.1 (Théorème de Tarski-Seidenberg). *L'image d'un semi-algébrique $X \in \mathbb{R}^{n+1}$ par la projection*

$$\begin{array}{ccc} \pi : & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) & \mapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

est semi-algébrique, c'est-à-dire que $\pi(X)$ est un ensemble semi-algébrique.

La démonstration de ce théorème se trouve dans la partie 3.4. Pour l'instant, étudions une application du théorème 3.1:

Lemme 3.2. *Soient $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions semi-algébriques. Alors, $f \circ g$ est une fonction semi-algébrique.*

Proof. Posons $h = f \circ g$ et $z = h(x)$ pour x dans \mathbb{R}^n .

On peut décrire le graphe de h comme étant :

$$\Gamma(h) := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \exists y \in \mathbb{R}^p, y = g(x) \text{ et } z = f(y)\}$$

Posons

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m, y = g(x) \text{ et } z = f(y)\}$$

S est semi-algébrique. Montrons que $\Gamma(h) = \pi(S)$.

Soit $(x, z) \in \Gamma(h)$ alors il existe $y \in \mathbb{R}^p$ tel que $y = g(x)$ et $z = f(y)$ par conséquent $(x, y, z) \in S$ et $\pi(x, y, z) = (x, z)$. Donc $\Gamma(h) \subseteq \pi(S)$.

Soit $(x, y, z) \in S$ alors $z = f \circ g(x)$ et donc $(x, z) \in \Gamma(h)$.

De plus $\pi : S \rightarrow \pi(S)$ est surjective. Donc pour tout $(x, z) \in \pi(S)$ il existe $y \in \mathbb{R}^p$ tel que (x, y, z) soit dans S donc $(x, z) \in \Gamma(h)$.

On a donc $\pi(S) \subseteq \Gamma(h)$.

Par conséquent $\pi(S) = \Gamma(h)$.

D'après le théorème de Tarski-Seidenberg, comme S est semi-algébrique alors $\pi(S)$ l'est aussi donc $\Gamma(h)$ est semi-algébrique.

Par conséquent la composée de deux fonctions semi-algébriques $f \circ g$ est semi-algébrique. \square

3.2 Théorème de Décomposition Cellulaire

Théorème 3.3 (Théorème de Décomposition Cellulaire pour une fonction). *Soit $P(x, y)$ un polynôme avec $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Alors il y a une partition semi-algébrique $\{A_1, \dots, A_m\}$ de \mathbb{R}^n tel que, pour chaque $k = 1, \dots, m$, P a un signe constant (> 0 , < 0 ou $= 0$) pour tout $x \in A_k$ et $y \in \mathbb{R}$, ou bien, il existe un nombre fini de fonctions semi-algébriques continues $\xi_1 < \dots < \xi_{r_k}$ sur A_k telle que*

1. $\{\xi_1(x), \dots, \xi_{r_k}(x)\}$ est l'ensemble des racines de $P(x, y)$, pour chaque $x \in A_k$;
2. Le signe de $P(x, y)$, pour $x \in A_k$, dépend seulement du signe de $y - \xi_i(x)$, $i = 1, \dots, r_k$.

La démonstration de ce résultat est dans la sous partie 3.5. Pour démontrer le théorème de Tarski-Seidenberg, nous avons besoin de la version suivante du théorème 3.3 de décomposition cellulaire :

Corollaire 3.4 (Théorème de Décomposition Cellulaire semi-algébrique). *Soient $P_1(x, y), \dots, P_t(x, y)$ des polynômes avec $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}$, alors il y a une partition semi-algébrique $\{A_1, \dots, A_m\}$ de \mathbb{R}^n telle que, pour chaque $k = 1, \dots, m$, les racines des P_1, \dots, P_t sur A_k sont données par des fonctions continues semi-algébriques $\xi_1 < \dots < \xi_{r_k}$, et le signe de chaque $P_j(x, y)$ sur A_k dépend seulement des signes de $y - \xi_i(x)$, $i = 1, \dots, r_k$.*

Proof. D'après le théorème 3.3 pour tout polynôme P il existe une partition semi-algébrique $\{A_1, \dots, A_m\}$ de \mathbb{R}^n qui vérifie les assertions du théorème. Montrons par récurrence que si P_1, \dots, P_t vérifient les assertions du corollaire alors P_1, \dots, P_t, P_{t+1} les vérifient aussi.

Posons par hypothèse de récurrence :

$(A_i)_{i \in I}$ est la partition semi-algébrique de \mathbb{R} associée à P_1, \dots, P_t vérifiant les assertions du théorème pour les fonctions semi-algébriques $\alpha_l^i : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\alpha_1^i < \dots < \alpha_{L_i}^i$ et $l = 1, \dots, L_i$.

$(B_j)_{j \in J}$ est la partition semi-algébrique de \mathbb{R} associée à P_{t+1} vérifiant les assertions du théorème pour les fonctions semi-algébriques $\beta_m^j : B_j \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\beta_1^j < \dots < \beta_{M_j}^j$ et $m = 1, \dots, M_j$.

$(C_k)_{k \in K}$ est la partition semi-algébrique de \mathbb{R} associée à $P_1^2 + P_{t+1}^2, \dots, P_t^2 + P_{t+1}^2$ vérifiant les assertions du théorème pour les fonctions semi-algébriques $\gamma_n^k : C_k \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\gamma_1^k < \dots < \gamma_{N_k}^k$ et $n = 1, \dots, N_k$.

$D = \{D_{ijk} = A_i \cap B_j \cap C_k, (i, j, k) \in I \times J \times K\}$ est une partition semi-algébrique de \mathbb{R} qui vérifie les assertions du théorème pour P_1, \dots, P_t, P_{t+1} et les fonctions ξ_v associées. Sans perdre de généralités (à part raffiner les partitions), nous pouvons supposer D_{ijk} connexe.

En effet, D_{ijk} est une intersection finie de partitions de \mathbb{R}^n donc c'est une partition de \mathbb{R}^n , de plus c'est une intersection finie de semi-algébriques, donc D_{ijk} est un ensemble semi-algébrique.

On peut construire les fonctions ξ^{ijk} sur chaque D_{ijk} à l'aide de l'algorithme suivant pour $x \in D_{ijk}$:

Data: $L_i, M_j, N_k,$

Result: ξ_1, \dots, ξ_v

Execution:

$H = L_i + M_j - N_k, r = s = u = v = 1$ **while** $v \leq H$ **do**

if $\alpha_r^i(x) = \beta_s^j(x)$ **then**

$\xi_v^{ijk} = \gamma_u^k$

$u = u + 1$

$r = r + 1$

$s = s + 1$

$H = H - 1$

else

if $s > M_j$ ou $\alpha_r^i(x) < \beta_s^j(x)$ **then**

$\xi_v^{ijk} = \alpha_r^i$

$r = r + 1$

$H = H - 1$

else

$\xi_v^{ijk} = \beta_s^j$

$s = s + 1$

$H = H - 1$

end

end

$v = v + 1$

end

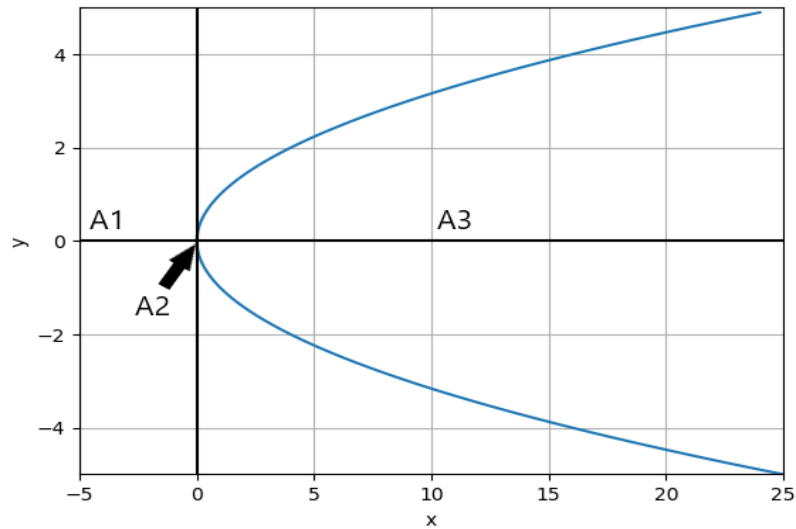
Ces fonctions vérifient les assertions du théorème car d'après les hypothèses de récurrence $P_1(x, y), \dots, P_t(x, y)$ est de signe constant sur $]\alpha_l^i, \alpha_{l+1}^i[$ pour chaque $l \in \{1, \dots, L_i\}$ et P_{t+1} est de signe constant sur $]\beta_m^j, \beta_{m+1}^j[$ pour chaque $m \in \{1, \dots, M_j\}$. Donc entre chaque $\alpha_l^i, \sigma_{ij} \beta_{m'}^j$ avec $\sigma_{ij} = \{<, >\}$ tel qu'il n'existe pas de $l_0 \in \{1, \dots, L_i\}$ et de $m_0 \in \{1, \dots, M_j\}$ tel que $\alpha_{l_0}^i \sigma_{ij} \alpha_{l_0}^i \sigma_{ij} \beta_{m_0}^j$ ou que $\alpha_{l_0}^i \sigma_{ij} \beta_{m_0}^j \sigma_{ij} \beta_{m_0}^j$ on aura $P_1(x, y), \dots, P_t(x, y), P_{t+1}(x, y)$ de signe constant. De plus si il existe $x \in D_{ijk}$ tel que $\alpha_l^i(x) = \beta_m^j(x)$ alors $\alpha_l^i(x) = \beta_m^j(x) = \gamma_n^k$, en effet, si $\alpha_l^i(x) = \beta_m^j(x)$ est une racine de $P_i(x, \alpha_l^i(x))$ et $P_{t+1}(x, \alpha_l^i(x))$, pour un certain $i \in \{1, \dots, t\}$, alors $\alpha_l^i(x)$ est aussi une racine de $P_i^2 + P_{t+1}^2$, donc il existe un n tel que $\alpha_l^i(x) = \gamma_n^k$. De plus, entre chaque γ_n^k on a que $P_1^2 + P_{t+1}^2, P_2^2 + P_{t+1}^2, \dots, P_t^2 + P_{t+1}^2$ est de signe constant.

Par conséquent, avec la construction précédente et les arguments ci-dessus $P_1(x, y), \dots, P_t(x, y), P_{t+1}(x, y)$ est de signe constant sur tout intervalle $]\xi_w, \xi_{w+1}[$ avec $w = 0, \dots, v + 1$, en posant $\xi_0 = -\infty$ et $\xi_{v+1} = +\infty$.

□

3.3 Exemples de décomposition cellulaires

Exemple 4. $P(x, y) = y^2 - x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

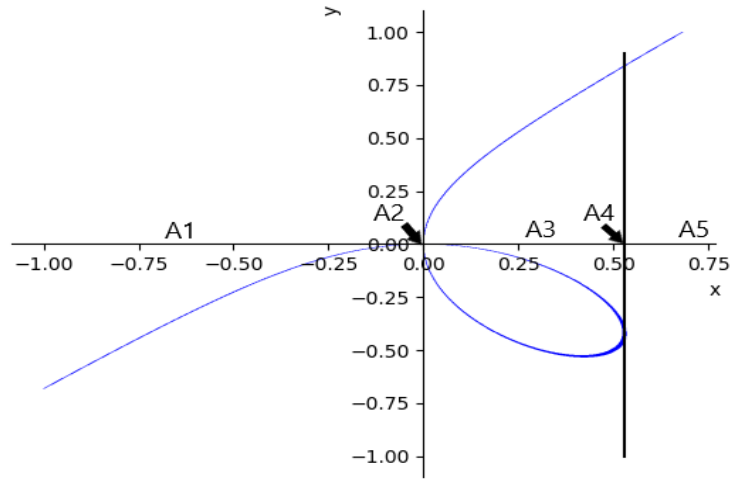


On peut prendre la partition de \mathbb{R} suivante : $\mathbb{R} = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$ avec $A_1 =]-\infty, 0[$, $A_2 = 0$ et $A_3 =]0, +\infty[$.

On a :

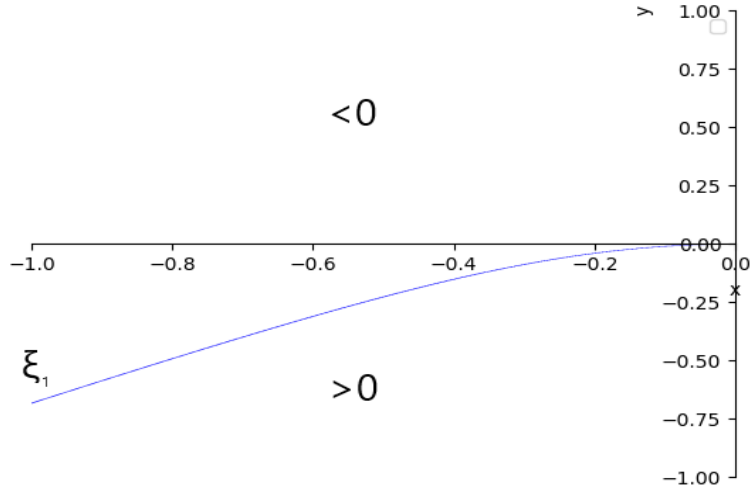
1. Pour tout $x \in A_1$, $P(x, y) > 0$.
2. Pour tout $x \in A_2$, $y^2 - x \geq 0$, $P(x, y)$ n'est pas de signe constant, on peut alors prendre $\xi_1 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$. $P(x, \xi_1(x)) = 0$ et $P(x, y) > 0$ quand $y \in]\xi_1(x), +\infty[$ ou quand $y \in]-\infty, \xi_1(x)[$.
3. Pour tout $x \in A_3$, $P(x, y)$ n'est pas de signe constant, on peut alors prendre $\xi_1 : A_3 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\xi_2 : A_3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas on aura $P(x, \xi_1(x)) = 0$ et $P(x, \xi_2(x)) = 0$, $P(x, y) < 0$ si $y \in]\xi_1(x), \xi_2(x)[$ et $P(x, y) > 0$ sinon.

Exemple 5. $P(x, y) = y^3 - xy - x^3$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$



On peut alors prendre la partition de \mathbb{R} suivante : $\mathbb{R} = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4 \sqcup A_5$ avec $A_1 =]-\infty, 0[$, $A_2 = 0$, $A_3 =]0, \frac{4}{3}[$, $A_4 = \frac{4}{3}$ et $A_5 =]\frac{4}{3}, +\infty[$. On a alors :

1. Pour tout $x \in A_1$, $P(x, y)$ n'est pas de signe constant, on peut alors prendre $\xi_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ comme sur la figure suivante :

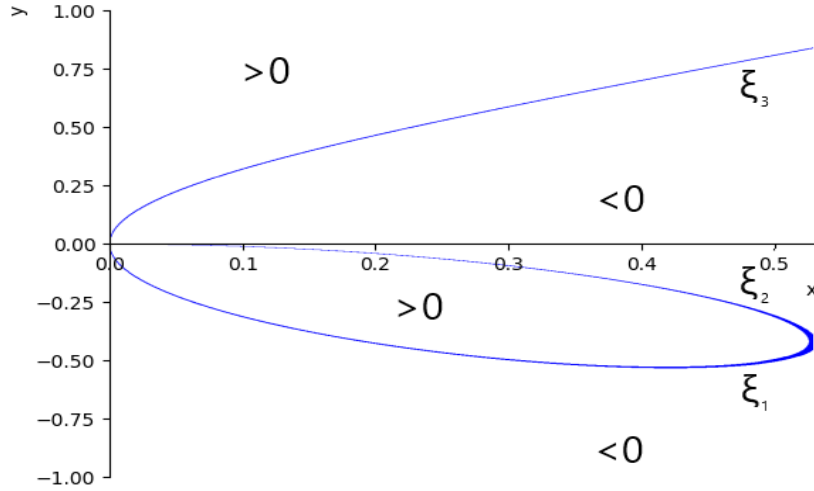


On a $P(x, \xi_1(x)) = 0$, $P(x, y) > 0$ si $y \in]-\infty, \xi_1(x)[$ et $P(x, y) < 0$ sinon.

2. Pour $x \in A_2$, $P(x, y)$ n'est pas de signe constant, on peut alors prendre

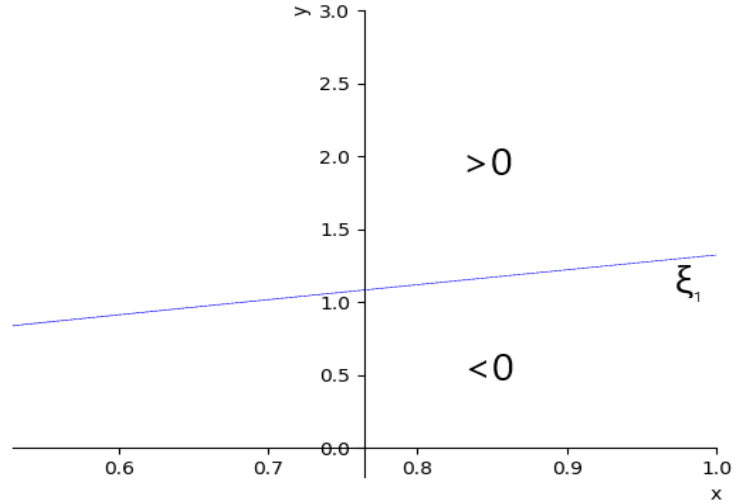
$$\xi_1 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 0 \cdot P(x, \xi_1(x)) = 0, P(x, y) > 0 \text{ si } y < \xi_1(x) \text{ et } P(x, y) < 0 \text{ sinon.}$$
3. Pour $x \in A_3$, $P(x, y)$ n'est pas de signe constant, on peut alors prendre $\xi_1, \xi_2, \xi_3 : A_3 \rightarrow \mathbb{R}$ comme sur la figure suivante :



On a $P(x, y) = 0$ si $y = \xi_1(x)$, $\xi_2(x)$ ou $\xi_3(x)$, $P(x, y) > 0$ si $y \in]\xi_1(x), \xi_2(x)[$ ou si $y > \xi_3(x)$ et $P(x, y) < 0$ si $y \in]\xi_2(x), \xi_3(x)[$ ou si $y < \xi_1(x)$.

4. Pour $x \in A_4$, $P(x, y)$ n'est pas de signe constant, on peut alors prendre $\xi_1 : A_4 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\xi_2 : A_4 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -\frac{3\sqrt{2}}{3}$ et $x \mapsto 2\frac{3\sqrt{2}}{3}$ On a $P(x, y) = 0$ si $y = \xi_1(x)$ ou $y = \xi_2(x)$, $P(x, y) < 0$ si $y \in]-\infty, \xi_1(x)[\cup]\xi_2(x), +\infty[$ et $P(x, y) > 0$ sinon.
5. Pour $x \in A_5$, $P(x, y)$ n'est pas de signe constant, on peut alors prendre la fonction $\xi_1 : A_5 \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans la figure suivante :



On a $P(x, y) = 0$ si $y = \xi_1(x)$, $P(x, y) < 0$ si $y < \xi_1(x)$ et $P(x, y) > 0$ sinon.

3.4 Démonstration du Théorème 3.1

Soit $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ensemble semi-algébrique. X est semi-algébrique donc, d'après la Proposition 2.2, $X = \cup_{i=1}^p \cap_{j=1}^q \{(x, y) \in P_{ij}(x, y)\sigma_{ij}0\}$, où chaque P_{ij} est un polynôme et σ_{ij} est soit =, soit >.

On veut montrer que l'image de X par la projection $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est semi-algébrique.

Remarque 3.5. On peut remarquer que comme la projection de l'union est l'union de la projection, on peut supposer que

$$X = \cap_{j=1}^q \{(x, y) \in P(x, y)\sigma_{ij}0\}$$

Commençons par traiter le cas de l'intersection de deux basiques, le cas général pour un nombre fini d'intersections suit le même argument. Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | P_1\sigma_1 0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} | P_2\sigma_2 0\}$ deux ensembles semi-algébriques avec P_1 et P_2 deux polynômes et σ_1 et σ_2 des symboles = ou >. Soit $X = A \cap B$.

$$\pi(X) = \{x \in \mathbb{R}^n, \exists y \in \mathbb{R}, P_1\sigma_1 0 \text{ et } P_2\sigma_2 0\}$$

D'après le corollaire 3.4 pour P_1, P_2 , il existe une partition semi-algébrique $\{A_1, \dots, A_m\}$ de \mathbb{R}^n tels qu'on ait les assertions du corollaire 3.4.

Montrons que

$$\pi(X) = \cup_{i \in I} A_i$$

où

$$I = \{i \in \{1, \dots, m\}, \text{ tel que } \exists(x, y) \in A_i \times \mathbb{R} : P_1\sigma_1 0 \text{ et } P_2\sigma_2 0\}.$$

Soit $x_0 \in \cup_{i \in I} A_i$, alors $\exists i_0$ tel que $x_0 \in A_{i_0}$. D'après le corollaire 3.4 il existe ξ_1, \dots, ξ_{r_k} des fonctions semi-algébriques continues tels que pour tout $x \in A_{i_0}$, les $\{\xi_1, \dots, \xi_{r_i}\}$ sont les racines de P_1 et P_2 et tel que le signe de P_1 et P_2 ne dépend que du signe de $y - \xi_k(x)$.

Supposons qu'on ait $\xi_0 = -\infty$ et $\xi_{r_k} = +\infty$. On a $x_0 \in A_{i_0}$ donc il existe $(x, y) \in A_{i_0} \times \mathbb{R}$ tel que $P_1(x, y)\sigma_1 0$ et $P_2(x, y)\sigma_2 0$.

On a, d'après le théorème, deux cas à traiter :

1. Soit $\exists j = 1, \dots, r_{k-1}$ tel que $\xi_j(x) = y$ alors on peut prendre $y_0 = \xi_j(x_0)$ telle que $P_1(x_0, y_0)\sigma_1 0$ et $P_2(x_0, y_0)\sigma_2 0$ donc $(x_0, y_0) \in X$ et donc $x_0 \in \pi(X)$
2. Soit $\exists j = 0, \dots, r_{k-1}$ tel que $\xi_j(x) < y < \xi_{j+1}(x)$, alors on peut prendre $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\xi_j(x_0) < y_0 < \xi_{j+1}(x_0)$ tel que $P_1(x_0, y_0)\sigma_1 0$ et $P_2(x_0, y_0)\sigma_2 0$, on a $(x_0, y_0) \in X$ et donc $x_0 \in \pi(X)$.

On a par conséquent pour tout $x_0 \in \cup_{i \in I} A_i$, $x_0 \in \pi(X)$.

Donc

$$\cup_{i \in I} A_i \subseteq \pi(X)$$

Soit $x \in \pi(X)$ alors comme les A_i forment une partition de \mathbb{R}^n il existe $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que $x \in A_{i_0}$. On sait de plus qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $P_1(x, y)\sigma_1 0$ et $P_2(x, y)\sigma_2 0$ donc en particulier on a $(x, y) \in A_{i_0} \times \mathbb{R}$ tel que $P_1(x, y)\sigma_1 0$ et $P_2(x, y)\sigma_2 0$ donc $i_0 \in I$.

Par conséquent $x \in \cup_{i \in I} A_i$.

Donc

$$\pi(X) \subseteq \cup_{i \in I} A_i$$

On a donc bien

$$\pi(X) = \cup_{i \in I} A_i$$

Donc l'image de la projection d'un semi-algébrique par π est une union de semi-algébrique, elle est donc semi-algébrique.

3.5 Démonstration du Théorème 3.3

Pour démontrer le théorème 3.3 de décomposition cellulaire on a besoin des deux résultats préliminaires suivants :

Lemme 3.6. *Supposons $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble connexe.*

Soit $f = f_0 + f_1T + \dots + f_dT^d$ un polynôme où chaque f_i est un polynôme sur X et supposons $e \leq d$ est tel que le polynôme $f(x, T) \in \mathbb{R}[T]$ a exactement e racines complexes distinctes, pour chaque $x \in X$. Alors le nombre de racines réelles distinctes de $f(x, T)$ est aussi constant sur X . De plus, si on note par $\zeta_1(x) < \dots < \zeta_r(x)$ ces racines réelles, les fonctions $\zeta_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

Proof. Soient $x_0 \in X$ et z_1, \dots, z_e les différentes racines complexes de $f(x_0, T)$. Prenons des boules fermées B_i centrées en z_i dans \mathbb{C} , pour $i = 1, \dots, e$, tel que $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $B_i \cap \mathbb{R} = \emptyset$ si $z_i \notin \mathbb{R}$.

Par continuité des racines, on peut prendre un voisinage U de x_0 sur X tel que pour chaque $x \in U$ la boule B_i contient au moins une racine $\zeta_i(x)$ de $f(x, T)$, avec $\zeta_i : X \rightarrow \mathbb{C}$ pour $i = 1, \dots, e$. Notons que $\zeta_i(x)$ est la seule racine de $f(x, T)$ de B_i . En effet, il y a un nombre fixe e de racines et e boules, chacune avec au moins une racine et donc au plus une aussi.

Le graphe de ζ_i :

$$\Gamma(\zeta_i) = \{(x, t) \in U \times B_i : f(x, t) = 0\}$$

est fermé. Comme B_i est compacte alors ζ_i est continue sur U . En effet, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de U telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} x \in U$. Prenons $t_n = \zeta_i(x_n)$, comme B_i est compact, alors il existe une sous-suite ϕ tel que $\zeta_i(x_{\phi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t$, donc toute suite (x_n, t_n) de $U \times B_i$ converge vers $(x, t) \in U \times B_i$ quand n tend vers l'infini car $\Gamma(\zeta_i)$ est fermé, donc $t = \zeta_i(x)$ et par conséquent ζ_i est bien continue sur U .

Montrons que les ζ_i sont à valeurs réelles et que pour tout $x \in X$ il y a le même nombre de racines réelles de $f(x, T)$.

Comme les coefficients de $f(x, T)$ sont réels, l'ensemble $\{\zeta_1(x), \dots, \zeta_e(x)\}$ est fermé par conjugaison complexe. En effet, pour tout polynôme P dans \mathbb{C} on a

$$\overline{P(x, T)} = \sum_{i=1}^d \overline{T^i a_i(x)} = \sum_{i=1}^d T^i \overline{a_i(x)} = P(x, \overline{T}),$$

donc si z est une racine de $P(x, z)$ alors \bar{z} l'est aussi, c'est à dire que si on a $z \in \mathbb{C}$ alors $P(x, z) = 0 \implies P(x, \bar{z}) = 0$.

Supposons que $z_i \in \mathbb{R}$ et supposons par l'absurde qu'il existe $x \in U$ tel que $\zeta_i(x) \notin \mathbb{R}$ et $\zeta_i(x)$ soit une racine de $f(x, T)$, alors $\overline{\zeta_i(x)}$ est une racine de $f(x, T)$, or il n'y a qu'une unique racine de $f(x, T)$ dans B_i donc $\zeta_i(x) \in \mathbb{R}$.

On a donc un nombre constant de racines réelles pour tout $x \in U$. Il reste à montrer que si on a le même nombre de racines réelles pour tout x au voisinage de x_0 , alors on a le même nombre de racines réelles pour tout $x \in X$.

Soit $x_0 \in X$, supposons qu'il y a r_0 racines réelles de $f(x_0, T)$, alors pour

tout point dans le voisinage U_{x_0} de x_0 on a aussi r_0 racines réelles de $f(x, T)$.
 Considérons $X_{r_0} := \{x \in X, \text{ avec } r_0 \text{ solutions}\}$. X_{r_0} est ouvert car en tout point de X_{r_0} il existe un voisinage tel que tout point de ce voisinage possède r_0 racines réelles donc X_{r_0} est une union d'ouvert, il est par conséquent bien ouvert. De plus, X_{r_0} est fermé car si on prend une suite quelconque $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_{r_0}$ tel que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ alors y a aussi r_0 racines réelles car à partir d'un certain rang $N \leq n$, y_n est dans le voisinage de y , donc il y a r_0 racines réelles de $f(y, T)$ par conséquent $y \in X_{r_0}$ donc X_{r_0} est aussi fermé et comme X est connexe et que $X_{r_0} \subseteq X$ est ouvert et fermé, alors X_{r_0} est soit X soit \emptyset . Par conséquent le nombre de racines réelles de $f(x, T)$ est le même sur tout $x \in X$. □

Lemme 3.7. Soit $A = (A_0, \dots, A_d)$ est un tuple de variables distinctes et soit

$$f(A, T) = A_0 + A_1T + \dots + A_dT^d \in \mathbb{Z}[A, T]$$

le polynôme de degré d . Soit $e \in \{0, \dots, d\} \cup \{\infty\}$. Alors l'ensemble

$$S_e := \{a = (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1} : f(a, T) \text{ a exactement } e \text{ racines complexes distinctes}\}$$

est une union d'ensembles de la forme

$$S_e = \{a \in \mathbb{C}^{d+1} : p_{1,e}(a) = \dots = p_{k_e,e}(a) = 0, \quad q_e(a) \neq 0\}$$

où $p_i(A), q_i(A) \in \mathbb{Z}[A]$.

Remarque 3.8. Notons que pour $e = 0$ l'ensemble est $\{(a_0, 0, \dots, 0) : a_0 \neq 0\}$; pour $e = \infty$ l'ensemble est juste le point $\{(0, \dots, 0)\}$.

Ce lemme implique en particulier que pour $f(T) = f_0 + f_1T + \dots + f_dT$ un polynôme, l'ensemble $\{x \in X : f(x, T) \text{ a exactement } e \text{ racines complexes}\}$ est semi-algébrique.

Exemple 6. Faisons la démonstration du lemme 3.7 avec un polynôme quelconque de degré deux. Cela nous servira à mieux comprendre le lemme 3.7, nous ferons la démonstration 3.5 du cas général juste après l'étude de ce cas particulier.

Soit

$$f(a, T) = a_0 + a_1T + a_2T^2 \text{ avec } a = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3 \text{ et } a_2 \neq 0$$

On cherche les paramètres (a_0, a_1, a_2) tels que f ait au plus une racine réelle. D'après la formule standard des solutions quadratiques, on sait que cet ensemble est donné par :

$$4a_0a_2 - a_1^2 = 0$$

Nous allons désormais, retrouver ce résultat d'une autre manière. Notons que

$$\frac{\partial f}{\partial T}(a, T) = a_1 + 2a_2T$$

Et notons que $f(a, T)$ a au plus $k = 1$ racines si, et seulement si, f et $\frac{\partial f}{\partial T}$ ont une racine commune. Cela impliquerait l'existence de $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$, tel que :

$$\begin{aligned} q(x, T) &= x_0 \\ r(x, T) &= x_1 + x_2 T \end{aligned}$$

soient des polynômes complexes tels que

$$f(a, T) \cdot q(x, T) = \frac{\partial f}{\partial T}(a, T) \cdot r(x, T)$$

Nous voulons étudier les différentes solutions possibles de cette équation.

On peut remarquer que, si il existe une solution $x = (x_0, x_1, x_2) \neq \{0\} \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ pour (a_0, a_1, a_2) fixé, alors f peut avoir au plus une solution. On cherche $\beta_0(a, x), \beta_1(a, x), \beta_2(a, x)$ des fonctions bilinéaires telles que

$$\begin{aligned} f(a, T) \cdot q(x, T) - \frac{\partial f}{\partial T}(a, T) \cdot r(x, T) \\ = \beta_0(a, x) + \beta_1(a, x)T + \beta_2(a, x)T^2 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f(a, T) \cdot q(x, T) - \frac{\partial f}{\partial T}(a, T) \cdot r(x, T) \\ = a_0 x_0 - x_1 a_1 + x_0 a_1 T - 2x_1 a_2 T - x_2 a_1 T + x_0 a_2 T^2 - 2x_2 a_2 T^2 \end{aligned}$$

Par identification on trouve les fonctions bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_0(a, x) &= a_0 x_0 - a_1 x_1 \\ \beta_1(a, x) &= a_1 x_0 - 2a_2 x_1 - a_1 x_2 \\ \beta_2(a, x) &= a_2 x_0 - 2a_2 x_2 \end{aligned}$$

Posons l'application linéaire $\phi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$
 $x \mapsto (\beta_0(a, x), \beta_1(a, x), \beta_2(a, x))$
la matrice associée à ϕ est $A = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & 0 \\ a_1 & -2a_2 & -a_1 \\ a_2 & 0 & -2a_2 \end{pmatrix}$.

On cherche une solution non triviale à

$$\begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & 0 \\ a_1 & -2a_2 & -a_1 \\ a_2 & 0 & -2a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que la solution est triviale si A admet un inverse, c'est-à-dire que si le déterminant de A est différent de zéro, alors la solution sera triviale.

Étudions le déterminant de A :

$$\det(A) = a_2(4a_0 a_2 - a_1^2)$$

On remarque que le déterminant de A est nul si le discriminant de f est nul, on a donc au plus une solution non triviale de notre équation. Ce résultat coïncide

avec les connaissances élémentaires sur les équations du second degré, ce qui crée un lien évident entre le nombre exact de racines complexes distinctes et le calcul du discriminant de notre polynôme.

Proof. Soient $d > 0$ et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ avec $a_d \neq 0$. Posons

$$g := \text{degré du } \text{pgcd}(f(a, T), (\frac{\partial f}{\partial T})(a, T)).$$

Alors $\text{ppcm}(f(a, T), (\frac{\partial f}{\partial T})(a, T))$ est de degré $2d - g - 1$, en effet

$$\text{ppcm}(f(a, T), (\frac{\partial f}{\partial T})(a, T)) = \frac{f(a, T) \cdot (\frac{\partial f}{\partial T})(a, T)}{\text{pgcd}(f(a, T), (\frac{\partial f}{\partial T})(a, T))}$$

On a $f(a, T)$ de degré d , $(\frac{\partial f}{\partial T})(a, T)$ de degré $d - 1$ donc le produit des deux est de degré $2d - 1$ et en divisant par le pgcd le degré est $2d - g - 1$.

Le nombre de racines complexes distinctes de $f(a, T)$ est $d - g$.

Soit $0 < k < d$, alors la condition :

$$\begin{cases} f(a, T) \cdot q(x, T) = (\frac{\partial f}{\partial T})(a, T) \cdot r(x, T) \\ x = (x_0, \dots, x_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+1} \setminus \{0\}, & \text{où} \\ q(x, T) = x_0 + x_1 T + \dots + x_{k-1} T^{k-1} & \text{et} \\ r(x, T) = x_k + x_{k+1} T + \dots + x_{2k} T^k \end{cases} \quad (1)$$

est équivalente à $2d - g - 1 \leq d + k - 1$, c'est-à-dire que pour $d - g \leq k$ on a la condition que $f(a, T)$ possède au plus k racines complexes distinctes.

On a

$$f(a, T) \cdot q(x, T) - (\frac{\partial f}{\partial T})(a, T) \cdot r(x, T) = \beta_0(a, X) + \beta_1(a, x)T + \dots + \beta_{d+k-1}(a, x)T^{d+k-1}$$

pour des fonctions bilinéaires que l'on peut construire $\beta_0, \dots, \beta_{d+k-1} : \mathbb{C}^{d+1} \times \mathbb{C}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{C}$.

Donc la condition de notre système (1) est équivalente à la condition que

$$\beta_i(a, x) = 0, \text{ pour tout } i \text{ et pour } x \in \mathbb{C}^{2k+1} \setminus \{0\}$$

C'est-à-dire que l'application linéaire

$$x \mapsto (\beta_0(a, x), \dots, \beta_{d+k-1}(a, x)) : \mathbb{C}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{d+k}$$

a une racine non triviale.

Ce qui équivaut à dire que tous les déterminants de tous les $(2k + 1) \times (2k + 1)$ mineurs de la matrice associée à cette application linéaire s'annulent. Ce qui nous montre que l'ensemble

$$T_k := \{a \in \mathbb{C}^{d+1} : a_d \neq 0 \text{ et } f(a, T) \text{ a au plus } k \text{ racines complexes différentes}\}$$

peut être vu comme une intersection de l'ensemble des racines de chaque déterminant des mineurs de la matrice de notre application avec l'ensemble $\{a \in \mathbb{C}^{d+1} : a_d \neq 0\}$, c'est-à-dire, qu'il existe des polynômes $p_{1,k}, \dots, p_{l_k,k}$ tels que:

$$T_k = \{p_{1,k} \dots = p_{e_k,k} = 0\}.$$

On a l'ensemble des coefficients avec au plus k racines complexes, on veut en avoir exactement k , on va donc prendre l'ensemble

$$\{a \in \mathbb{C}^{d+1} : p_{1,k} = \dots = p_{n,k} = 0, q_k(a) \neq 0\}$$

avec les $p_{i,k}$ qui sont les racines des déterminants des $(2k+1 \times 2k+1)$ mineurs de la matrice et $q_k(a) = p_{1,k-1}^2 + \dots + p_{n,k-1}^2$. □

Démonstration du Théorème 3.3. Soit $P(x, T)$ un polynôme avec $(x, T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Prenons $d \in \mathbb{N}$ tel que $P(x, T) = a_0(x) + a_1(x)T + \dots + a_d(x)T^d$, avec a_i des polynômes de \mathbb{R}^n pour $0 \leq i \leq d$ et $p_d(x) \neq 0$. Soit

$$X_e = \{x \in \mathbb{R}^n; P(x, T) \text{ a exactement } e \text{ racines complexes}\}$$

On a d'après le lemme 3.7 que

$$X_e = \{x \in \mathbb{R}^n; p_{1,e}(a_i(x)) = \dots = p_{k,e}(a_i(x)) = 0, q_e(a_i(x)) \neq 0\}.$$

Cet ensemble est semi-algébrique d'après la proposition 2.2, L'ensemble des X_e forme une partition de \mathbb{R}^n , en effet, si on suppose qu'il existe e et $e' \in \{0, \dots, d\} \cup \{\infty\}$ tels que $x \in X_e$ et $x \in X_{e'}$ alors $e = e'$ et de plus l'union de tous ces ensembles est \mathbb{R}^n .

Pour chaque composante connexe $C \in X_e$, $P(x, T)$ a exactement e racines complexes, par conséquent d'après le lemme 3.6, le nombre r de racines réelles est constant sur C , on les note $\xi_1(x), \dots, \xi_r(x)$ et chaque fonctions $\xi_i : C \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On a de plus d'après le théorème des valeurs intermédiaire que $P(x, T)$ est de signe constant entre chaque racine consécutive $]\xi_i, \xi_{i+1}[$ avec $i \in \{0, r\}$ et $\xi_0 = -\infty$ et $\xi_{r+1} = +\infty$. □

References

- [BM] E. Bierstone and P. Milman. Semianalytic and subanalytic sets. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 67 (1988), 5–42.
- [VdD] L. van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*, vol. 248 of London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.